Matematica con Esercitazioni 21. 11. 2015

1. Descrivere geometricamente l'applicazione $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z \cdot (1 + i\sqrt{3})$. Stabilire se f è $\mathbb{R}$-lineare. Scrivere f in forma matriciale, cioè posto $z = x + iy$ e $f(z) = \tilde{x} + i\tilde{y}$, trovare una matrice $\mathbf{A}$ tale che $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Qual è l'applicazione inversa e qual è la matrice associata ad essa?

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 77, Esercizio 27) Scrivere la matrice che rappresenta, nel piano, la rotazione di: (a) $\frac{\pi}{6}$, (b) π, (c) $-\frac{\pi}{2}$.

   Scrivere le matrici inverse delle matrici precedenti.

3. Data la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, calcolare la matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ e dire se $\mathbf{B}$ è simmetrica. È per una qualunque matrice $\mathbf{A}$ il prodotto $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ una matrice simmetrica?

4. Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per stabilire se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, per calcolarne l'inversa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Qual è il rango delle matrici?

5. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 38, p. 94) Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Suggerimento: Si usi l'algoritmo di Gauss per ridurre le matrici a scala per righe.

6. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $a \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.

   (a) Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per calcolare l'inversa della matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

   (Osservazione: La formula ottenuta vale anche nel caso $a = 0$, purchè sia $ad - bc \neq 0$.)

   (b) Si scriva l'inversa di $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$.