Matematica con Esercitazioni

28. 11. 2015

1. Si determinino le coordinate del vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (-2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{i} - \mathbf{j})$:
   (a) geometricamente attraverso un disegno;
   (b) algebricamente utilizzando la matrice contragrediente della matrice di trasformazione dei vettori di base $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Sia $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare rappresentata nelle basi canoniche da
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Trovare matrici invertibili $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ tali che $\mathbf{SAT}^{-1} = \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le matrici $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ sono univocamente determinate?
   (b) Determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^3$ e una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che F rispetto alle basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ viene rappresentata dalla matrice
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Suggerimento: Le basi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ si ottengono dalle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ utilizzando le matrici contragredienti di $\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}$ rispettivamente.

3. Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = -3 \end{cases}.$$

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 46, p. 107) Risolvere i sistemi
$$\text{(a)} \quad \begin{cases} 6x - 2y - 2z - 8t = 7 \\ -9x + 3y + 3z + 12t = 13 \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} x - 3y + 5z = -3 \\ 3x + 2y + 4z = -9 \\ -x - 3y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = -6 \end{cases}$$

5. Discutere la risolubilità del sistema
$$\begin{cases} x - y - 2z = 3 \\ 2x + y + z = a \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$
   in funzione del parametro reale a.
   Suggerimento: Applicare l'eliminazione di Gauss e considerare il sistema equivalente triangolare.

6. Calcolare il determinante delle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.