Matematica con Esercitazioni 12. 12. 2015

1. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 57, p. 121) Un autovalore si dice *regolare* se la sua molteplicità geometrica coincide con la sua molteplicità algebrica. Dire se le seguenti matrici hanno autovalori regolari o no:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 58, p. 121) Determinare i valori del parametro k per i quali la matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -k & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
ammette come autovettore $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Scelto uno di questi valori k, dire se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, 6.8, p. 119) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ composta di autovettori della matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
diagonalizzare la matrice $\mathbf{A}$ con una matrice di passaggio ortogonale di determinante 1 (una rotazione, per quale angolo?) e descrivere geometricamente l'endomorfismo definito da $\mathbf{A}$ (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$).

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, 6.10, p. 121) Descrivere geometricamente l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalla matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
rispetto alla base canonica. Dire se la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$, e in caso affermativo diagonalizzarla.

5. Data la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,
   (a) calcolarne gli autovalori e gli autospazi corrispondenti;
   (b) determinare una matrice ortogonale $\mathbf{M}$ tale che $\mathbf{M}^T\mathbf{A}\mathbf{M}$ sia diagonale (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 118, Teorema 6.6).

6. Data la matrice di Pauli $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, calcolare
   (a) $\det(\sigma_2)$ e σ_2^{-1};
   (b) gli autovalori λ_1, λ_2 di σ_2;
   (c) una matrice unitaria $\mathbf{U}$ e la su inversa $\mathbf{U}^{-1}$ tale che $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$.