Matematica con Esercitazioni 12. 11. 2016

1. Scomporre il vettore $\vec{w} = (-4, 3)$ lungo le direzioni dei vettori $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, 3)$ attraverso una costruzione geometrica ed esprimere $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ attraverso un calcolo.

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 55, Esercizio 2) Dati i vettori $(1, 1, -1)$ e $(0, 2, 1)$, verificare se il vettore $(1, 1, 1)$ si può ottenere come combinazione lineare di essi.

3. Dati i vettori $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, -1)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^3$, si usi l'algoritmo di Gauss per

   (a) verificare se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sono linearmente indipendenti;

   (b) determinare $\dim \mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

   (c) trovare una base di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

   Si usi il procedimento di Gram-Schmidt per trovare una base ortonormale di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 70, Esercizio 21) Per quali valori del parametro reale t il vettore $\mathbf{w} = (2, t, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^4$ appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ generato da $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1)$? Calcolare la dimensione dello $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ al variare di t.

5. Dati i vettori $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, -1)$ in $\mathbb{R}^3$, trovare una base ortonormale di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b})$.

6. Sia π il piano passante per i punti $(0, 0, 0)$, $(2, 1, 2)$ e $(1, 5, 1)$.

   (a) Trovare un vettore (non nullo) ortogonale al piano π.

   (b) Trovare una base ortonormale del sottospazio lineare π di $\mathbb{R}^3$ mediante il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

   (c) Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 2, 1)$ su π.

7. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 38, p. 94) Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Suggerimento: Si usi l'algoritmo di Gauss per ridurre le matrici a scala per righe.