Matematica con Esercitazioni

19. 11. 2016

1. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 62, Esempio 3.7) Quali sono i sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$?

2. In $\mathbb{R}^4$, reso euclideo con il prodotto scalare standard, determinare:

   (a) una base ortonormale del sottospazio
   $$U := \mathrm{Span}((1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1));$$

   (b) la proiezione ortogonale del vettore $(2,3,2,-1)$ su U.

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 71, Esercizio 24) Stabilire quali delle seguenti funzioni $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sono lineari e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata ad esse rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$:

   (a) $f\colon (x,y) \mapsto (xy, x+y)$;

   (b) $f\colon (x,y) \mapsto (x-y, x+y+1)$;

   (c) $f\colon (x,y) \mapsto (2x-y, x+3y)$.

4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita dalle relazioni:
   $$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$
   dove $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è la base canonica in $\mathbb{R}^3$. Si scriva la matrice associata ad f.

5. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 42, p. 103) Si considerino la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\vec{b_1} = (1,2)$ e $\vec{b_2} = (2,0)$ e la trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definita:
   $$f(\alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2}) = (2\alpha + \beta)\vec{b_1} - \beta\vec{b_2}.$$

   (a) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

   (b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica.

   (c) Determinare $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, le loro dimensioni e una loro base.

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}+\mathbf{C}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $3\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{CA}$.