Matematica con Esercitazioni

26. 11. 2016

1. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, ed i vettori $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{wv}$, $\mathbf{vw}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{Av}$, $\mathbf{Bv}$, $\mathbf{wB}$.

2. Data la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, calcolare la matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ e dire se $\mathbf{B}$ è simmetrica. È per una qualunque matrice $\mathbf{A}$ il prodotto $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ una matrice simmetrica?

3. Scrivere le matrici inverse delle seguenti matrici elementari:
$$\mathbf{Q}_3^1(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_3(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per stabilire se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, per calcolarne l'inversa:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Qual è il rango delle matrici?

5. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $ad - bc \neq 0$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
   (a) Si scriva l'inversa di $\mathbf{D}$.
   (b) Supposto che $a \neq 0$, si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan.
   (Osservazione: La formula ottenuta vale anche nel caso $b \neq 0$.)
   (c) Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$ con il metodo della matrice degli aggiunti.

6. Calcolare il determinante delle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e, in caso di invertibilità, l'inversa.