Matematica con Esercitazioni

10. 12. 2016

1. Si determinino le coordinate del vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (-2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{i} - \mathbf{j})$:
   (a) geometricamente attraverso un disegno;
   (b) algebricamente utilizzando la matrice contragrediente della matrice di trasformazione dei vettori di base $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare rappresentata nelle basi canoniche dalla matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Trovare matrici invertibili $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}^{-1}$ tali che $\mathbf{SAT}^{-1} = \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le matrici $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}^{-1}$ sono univocamente determinate?
   (b) Determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^3$ e una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che f rispetto alle basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ viene rappresentata dalla matrice
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Suggerimento: Per (b) si possono usare le colonne delle matrici $\mathbf{T}^{-1}$ e $\mathbf{S}^{-1}$ oppure le righe delle matrici contragredienti di $\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}$.

3. Descrivere geometricamente l'applicazione $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z \cdot (1 + i\sqrt{3})$. Stabilire se f è $\mathbb{R}$-lineare. Scrivere f in forma matriciale, cioè posto $z = x + iy$ e $f(z) = \tilde{x} + i\tilde{y}$, trovare una matrice $\mathbf{A}$ tale che $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Qual è l'applicazione inversa e qual è la matrice associata ad essa?

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 77, Esercizio 27) Scrivere la matrice che rappresenta, nel piano, la rotazione di: (a) $\frac{\pi}{6}$, (b) π, (c) $-\frac{\pi}{2}$.

   Scrivere le matrici inverse delle matrici precedenti.