# Matematica con Esercitazioni

24. 12. 2016

1. (Bramanti-Pagani-Salsa, 6.10, p. 121) Descrivere geometricamente l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Dire se la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$, e in caso affermativo diagonalizzarla.

2. Data la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

   (a) calcolarne gli autovalori e gli autospazi corrispondenti;

   (b) determinare una matrice ortogonale $\mathbf{M}$ tale che $\mathbf{M}^T\mathbf{A}\mathbf{M}$ sia diagonale (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 118, Teorema 6.6).

3. Data la matrice di Pauli $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, calcolare

   (a) $\det(\sigma_2)$ e $\sigma_2^{-1}$;

   (b) gli autovalori $\lambda_1$, $\lambda_2$ di $\sigma_2$;

   (c) una matrice unitaria $\mathbf{U}$ e la su inversa $\mathbf{U}^{-1}$ tale che $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$.

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 56, p. 121) Determinare autovalori e autovettori della seguente matrice; se è possibile, diagonalizzarla:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Data la matrice

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

   (a) verificare che $\mathbf{S}$ è ortogonale e $\det(\mathbf{S}) = 1$, cioè che $\mathbf{S}$ rappresenta (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) una rotazione;

   (b) calcolare gli autovalori (reali e complessi) della matrice $\mathbf{S}$;

   (c) trovare l'asse della rotazione;

   (d) trovare l'angolo della rotazione utilizzando la traccia di $\mathbf{S}$;

   (e) trovare l'angolo della rotazione utilizzando gli autovalori complessi di $\mathbf{S}$.