1) **PROBLEMA DI CAUCHY**: $y' = \dfrac{e^{y-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; $y(1) = 3$

$y' = f(x)\cdot g(y)$ con $f(x) = e^{-2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in \,]0,+\infty[$;

$g(y) = e^{y}$, $y \in J = \,]-\infty,+\infty[$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot e^{y}$; $\int e^{-y}dy = \int \dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; $\underline{-e^{-y} = -e^{-2\sqrt{x}} + C}$ $*$

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$ in $*$ $\Rightarrow$ $-e^{-3} = -e^{-2} + C$; $C = e^{-2} - e^{-3}$, cosicché $*$ dà:

$-e^{-y} = -e^{-2\sqrt{x}} + e^{-2} - e^{-3}$; $e^{-y} = e^{-2\sqrt{x}} - e^{-2} + e^{-3}$; e quindi

$\boxed{y(x) = -\ln\left(e^{-2\sqrt{x}} - e^{-2} + e^{-3}\right)}$ (soluzione problema di Cauchy)

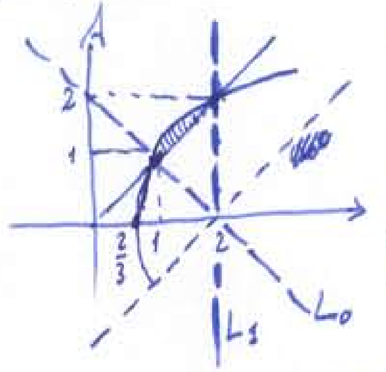
DOMINIO DELLA SOLUZIONE: deve essere $e^{-2\sqrt{x}} > e^{-2} - e^{-3}$; $-2\sqrt{x} > \ln(e^{-2} - e^{-3})$;

$\sqrt{x} < \underbrace{-\frac{1}{2}\ln(e^{-2}-e^{-3})}_{(>0)}$ $\rightarrow$ $x < \frac{1}{4}\left(\ln(e^{-2}-e^{-3})\right)^2$, cioè, il dominio della soluzione è l'intervallo: $]\,0\,,\ \frac{1}{4}\left(\ln(e^{-2}-e^{-3})\right)^2[$.

---

2) **MINIMO, MASSIMO ASSOLUTO DI** $f(x,y) = \dfrac{x+y-2}{y}$ IN $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x - y \le 0;\ 3x - y^2 - 2 \ge 0\}$

$\begin{cases} x-y=0 \\ 3x-y^2-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = <^1_2 \\ y = <^1_2 \end{cases}$ (rispettivamente)



Linee di livello di f: $L_k = \{(x,y);\ \frac{x+y-2}{y} = k\}$ = $\{(x,y);\ y \neq 0$ e $x-y-2 = ky\}$. Sono rette passanti per $(2,0)$, escludendo tale punto da ciascuna retta.

Le linee rispettivamente corrispondenti al MINIMO e al MASSIMO k, aventi intersezione non vuota con A, sono
- la retta passante per $(1,1)$: $k = \frac{1+1-2}{1} = 0$
- la retta passante per $(2,2)$: $k = \frac{2+2-2}{2} = 1$

Quindi il minimo e il massimo di f in A sono: $\underline{0}$ e $\underline{1}$

CH. IND. 12.02.2013

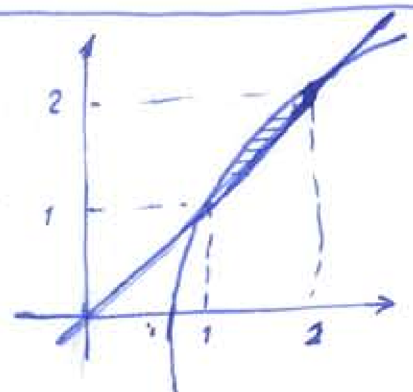
---

3) $\iint_A \frac{1}{y}\,dxdy$, A = [come es. 2]

$\iint_A \frac{1}{y}\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{3}(y^2+2)}^{y} \frac{1}{y}\,dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x}{y} \right]_{x=\frac{1}{3}(y^2+2)}^{x=y} dy =$

$= \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\frac{1}{y} \right) dy = \left[y - \frac{1}{6}y^2 - \frac{2}{3}\ln y \right]_{y=1}^{y=2}$

$= 2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\ln 2 - 1 + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\ln 2}$



---

4) **RISOLVERE IN $\mathbb{C}$**: $(\bar{z})^3 = |z|$ ⊛

Indichiamo $z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho = |z|$, $\theta = \arg z$; allora $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ e $|z| = \rho$, cosicché ⊛ diventa:

$\rho^3 e^{-3i\theta} = \rho$. Uguagliando i moduli si ha $\rho^3 = \rho$,

da cui $\rho(\rho^2 - 1) = 0$, $\rho = 0 \ \vee\ \rho = 1$ (ρ deve essere ≥ 0)

Se $\rho = 0$, allora $z = 0$ e ⊛ è soddisfatta.

Se $\rho = 1$ allora $\rho^3 e^{-3i\theta} = \rho$ $\Rightarrow$ $e^{-3i\theta} = 1$, quindi

$-3i\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\theta = -\frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

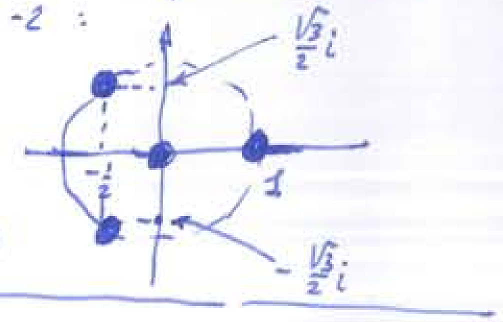
Si ottengono soltanto 3 soluzioni z diverse, assegnando a k tre valori interi consecutivi, per esempio 0, -1, -2 :

$k=0 \rightarrow \theta = 0 \rightarrow z = 1$

$k=-1 \rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi \rightarrow z = e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k=-2 \rightarrow \theta = \frac{4}{3}\pi \rightarrow z = e^{\frac{4}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(vi è inoltre la soluzione $z=0$ trovata prima)



---

4) AUTOVALORI, AUTOVETTORI, BASE SPETTRALE ORTONORMALE, relativi alla matrice reale simmetrica $A = \frac{1}{6}\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{B}$

È più semplice calcolare gli autovalori di $B = 6A$; gli autovalori di A sono uguali a quelli di B divisi per 6 ; infatti se $Bv = \lambda v$ allora $6Av = \lambda v$, cioè $Av = \frac{1}{6}\lambda v$, e gli autovettori sono gli stessi per A e per B.

POLINOMIO CARATTERISTICO DI B: $\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 10\lambda + 25)(2-\lambda) - 4 - 4 - 4(5-\lambda) - (2-\lambda) - 4(5-\lambda) =$

$= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 25\lambda + 2\lambda^2 - 20\lambda + 50 - 8 - 20 + 4\lambda - 2 + \lambda - 20 + 4\lambda =$

$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = -\lambda(\lambda - 6)^2$. Gli autovalori di B sono: 0 (molteplicità algebrica 1) ; 6 (molteplicità algebrica 2) ; gli autovalori di A sono quindi 0 e 1, quest'ultimo "doppio".

Autovettori : calcoliamoli su B (autovalori 0 e 6)

$\cdot\ \lambda = 0$ $\begin{cases} 5x + y - 2z = 0 \\ x + 5y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ Matrice del sistema $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ← già divisa per 2

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ R2+5R1 \\ R3+R1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R3-R2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R1 \times (-1) \\ R2 \times \frac{1}{6} \\ \ \end{matrix}$

corrispondente al sistema: $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}$

Base autospazio: $\underline{\{(1, -1, +2)\}}$

Autovettori di B associati a $\lambda = 6$: $\begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \iff x = y - 2z$:

$(x,y,z) = (y - 2z, y, z)$ $\forall\, y, z \in \mathbb{R}$. Per es. con $y = 1$, $z = 0$: $(1, 1, 0)$

Un secondo autovettore $(y - 2z, y, z)$ è ortogonale a $\underline{(1,1,0)}$ se $y - 2z + y = 0$, cioè $\underline{y = z}$: per es. $y = z = 1$ dà $\underline{(-1, 1, 1)}$

Poi: $\|(1,-1,2)\| = \sqrt{6}$, $\|(1,1,0)\| = \sqrt{2}$, $\|(-1,1,1)\| = \sqrt{3}$; quindi una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ spettrale per B (e per A) è

$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) ;\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) ;\ \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$

Interpretazione geometrica di F endomorfismo associato ad A: detti $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ gli autospazi relativi a $\lambda = 0$, $\lambda = 1$: F è la identità quando è ristretta a $\mathcal{S}_1$, l'endomorfismo nullo quando ristretta a $\mathcal{S}_0$. Complessivamente è la proiezione di $\mathbb{R}^3$ su $\mathcal{S}_1$, secondo la direzione di $\mathcal{S}_0$ (ortogonale a $\mathcal{S}_1$)