1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = 3y \cdot \tan x + 8 \operatorname{sen} x$; $y(\pi) = 3$

E.D. lineare 1° ordine "$y' = ay+b$" $a(x) = 3\tan x$, $b(x) = 8 \operatorname{sen} x$, $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

$A(x) = \int a(x)\,dx = 3\int \tan x\,dx = 3\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$

$= -3\ln(-\cos x)$ $\quad$ ($-\cos x = |\cos x|$ quando $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$)

$\rightarrow y(x) = e^{-3\ln(-\cos x)} \left(C + \int 8 \operatorname{sen} x \cdot e^{3\ln(-\cos x)}\,dx \right)$

$= \frac{-1}{\cos^3 x} \left(C + \int -8 \operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x\,dx \right) = \frac{-1}{\cos^3 x}\left(C + 2\cos^4 x\right)$

Calcolo C: $y(\pi) = C+2$ desiderato $= 3 \Rightarrow C = 1$

Soluzione problema di Cauchy: $y(x) = \frac{-1}{\cos^3 x}\left(1 + 2\cos^4 x\right)$

---

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = x^2 e^{-x+y^2}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (2x - x^2)\, e^{-x+y^2} = 0 & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y\, e^{-x+y^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\rightarrow$ $x = 0 \vee y = 0$

Se $x = 0$ (1) e' un'identità $\rightarrow$ $(0,y)$ p. critico $\forall y \in R$

Se $y = 0$ (1) $\Rightarrow$ $2x - x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 2$

Ulteriore punto critico: $(2,0)$

matrice hessiana:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2 - 2x - 2x + x^2)\, e^{-x+y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y(2x - x^2)\, e^{-x+y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (4xy - 2x^2 y)\, e^{-x+y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2x^2 + 4x^2y^2)\, e^{-x+y^2}$

$$\Rightarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} (2 - 4x + x^2)\, e^{-x+y^2} & 2y(2x - x^2)\, e^{-x+y^2} \\ 2y(2x - x^2)\, e^{-x+y^2} & (2x^2 + 4x^2y^2)\, e^{-x+y^2} \end{pmatrix}$$

$H(2,0) = \begin{pmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 8e^{-2} \end{pmatrix}$; $\det H(2,0) < 0$

$\Rightarrow$ $(2,0)$ punto di sella

Nei punti $(0,y)$ e' $H(0,y) = \begin{pmatrix} 2e^{y^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H = 0$

La matrice hessiana non stabilisce la natura di questi punti critici; tuttavia $f(0,y) = 0$, e $f(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in R$; perciò i punti $(0,y)$ sono punti di MINIMO (assoluto) per f.

CH. IND. 06.04.2013

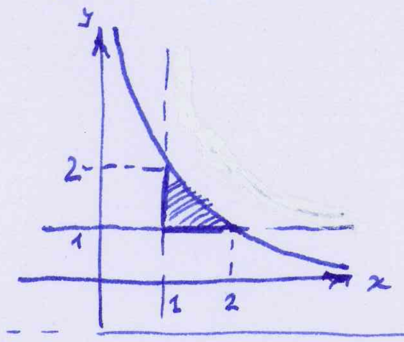
---

3) $\iint_A \frac{1}{x}\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) \in R^2;\ x \geq 1,\ y \geq 1,\ xy \leq 2\}$

$\iint_A \frac{1}{x}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^{\frac{2}{x}} \frac{1}{x}\,dy \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{y}{x}\right]_{y=1}^{y=\frac{2}{x}} dx =$

$= \int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left[-\frac{2}{x} - \ln x\right]_{x=1}^{x=2}$

$= -1 - \ln 2 + 2 = \boxed{1 - \ln 2}$



---

4) EQUAZIONE IN $\mathbb{C}$: $z^3 = 27i$

. modulo, argomento di $w = 27i$: $|27i| = 27$; $\arg 27i = \pi/2$.

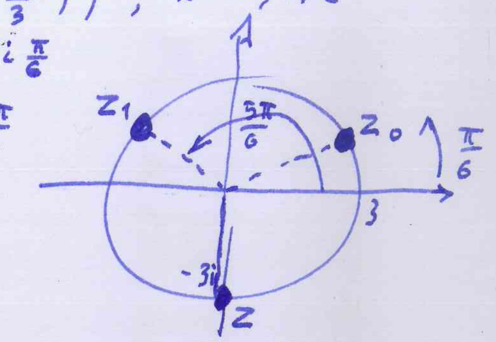
Le soluzioni di $z^3 = 27i$ sono:

$z = z_k = \sqrt[3]{27} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $k = 0, 1, 2$

$z_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_1 = 3\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_2 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -3i = 3e^{-\frac{3}{2}\pi i}$



---

5) DETERMINARE k in modo che $\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sia autovettore per la matrice $A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -k & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Per tale k, dire se A e' diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$\underline{x}$ autovettore per A vuol dire che $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $A \cdot x = \lambda x$

$A \cdot x = \begin{pmatrix} 3-3k \\ -3+2-2 \\ -3k+2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3k \\ -3 \\ 6-3k \end{pmatrix}$ desiderato $= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$

Osservando le seconde componenti si nota $\lambda = -3$; quindi deve essere $\begin{cases} 3 - 3k = -9 \\ 6 - 3k = -6 \end{cases}$ da cui $\underline{k = 4}$

Per $k = 4$ la matrice A e': $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; gli autovalori si ottengono risolvendo:

$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -4 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$ cioe' $(-3-\lambda)\left((2-\lambda)^2 + 2\right) = 0$;
le cui soluzioni sono

$\lambda_1 = -3$; $(2-\lambda)^2 = -2 \rightarrow 2 - \lambda = \pm i\sqrt{2}$

$\rightarrow \lambda_2, \lambda_3 = 2 \pm i\sqrt{2}$ $\underline{\in \mathbb{C} - \mathbb{R}}$

Poiché gli autovalori di A non sono tutti reali, A NON e' diagonalizzabile su $\mathbb{R}$