1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{x+1}{x+3}y + 4e^x$; $y(0)=0$

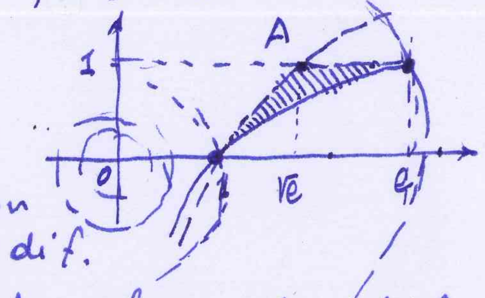
E' una E.D. lineare di 1° ordine, "$y' = ay+b$", con $a(x)=\frac{x+1}{x+3}$; $b(x)=4e^x$, $x\in]-3,+\infty[$.

Calcoliamo $A(x)=\int a(x)dx = \int\frac{x+1}{x+3}dx = \int\frac{x+3-2}{x+3}dx = \int\left(1-\frac{2}{x+3}\right)dx =$
$= x - 2\ln(x+3)$. Allora: $y(x)=e^{A(x)}\left(C+\int b(x)e^{-A(x)}dx\right) =$
$= e^{x-2\ln(x+3)}\left(C+\int 4e^x\cdot e^{-x+2\ln(x+3)}dx\right) =$
$= \frac{e^x}{(x+3)^2}\left(C+4\int(x+3)^2dx\right) = \frac{e^x}{(x+3)^2}\left(C+\frac43(x+3)^3\right)$.

Ora calcoliamo C: $y(0)=\frac{1}{9}(C+36)$ desiderato $=0 \Rightarrow C=-36$

La soluzione del problema di Cauchy e':
$y(x)=\frac{e^x}{(x+3)^2}\left(-36+\frac43(x+3)^3\right)$, $x\in]-3,+\infty[$

2) FUNZIONE DI 2 VARIABILI: $f(x,y)=x^2+y^2$.
Trovare il minimo e il massimo valore che f assume in $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0;\ \ln x\le y\le 2\ln x;\ y\le 1\}$



Per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)$ esprime il quadrato della distanza di (x,y) dall'origine. Le linee di livello di f sono circonferenze con centro (0,0), con raggio crescente al crescere del valore di f. Perciò, $\min\{f(x,y), (x,y)\in A\}$ e' assunto nel punto di A di minima distanza da (0,0), che e' (1,0), in cui f vale: $f(1,0)=1$. Invece $\max\{f(x,y); (x,y)\in A\}$ e' assunto nel punto di A di massima distanza da (0,0), che e' (e, 1) in cui f vale: $f(e,1)=e^2+1$. Pertanto: $\min\{f(x,y), (x,y)\in A\}=1$; $\max\{f(x,y); (x,y)\in A\}=e^2+1$

CH. IND. 17.06.2013

3) CALCOLARE: $\iint_A \frac{y}{x}\,dx\,dy$; A = [vedi es. 2]

Conviene effettuare la riduzione dell'integrale "per linee orizzontali", descrivendo quindi A come: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le y\le 1;\ e^{y/2}\le x\le e^y\}$.

$\iint_A\frac{y}{x}dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{e^{y/2}}^{e^y}\frac{y}{x}dx\right)dy = \int_0^1[y\ln x]_{x=e^{y/2}}^{x=e^y}dy = \int_0^1\frac{y^2}{2}dy =$
$= \frac16[y^3]_{y=0}^{y=1} = \frac16 \leftarrow$

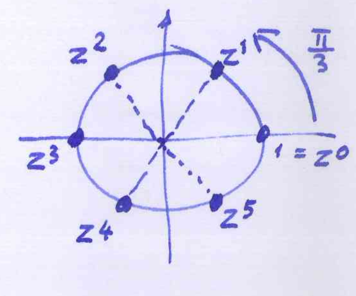
4) SIANO: $z=\frac12+\frac12\sqrt3\, i$, $w=\frac12-\frac12\sqrt3\, i$

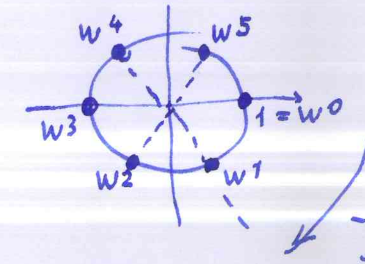
4/1 Rappresentare graficamente z^n, w^n per $n=0,1,2,3,4,5$.

4/2* Scrivere in forma algebrica* z^n-w^n, $n\in\mathbb{N}$

* $a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$

E' $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $w=\bar z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ quindi per ogni $n\in\mathbb{N}$, $z^n=e^{i\frac{n\pi}{3}}$, $w^n=e^{-i\frac{n\pi}{3}}$





Le figure a fianco mostrano le potenze di z (sopra) e di w (sotto). I raggi consecutivi formano sempre angoli di $\frac{\pi}{3}$ rad. Si nota la periodicità delle potenze, con periodo 6: $z^{n+6}=z^n$, $w^{n+6}=w^n$, per ogni $n\in\mathbb{N}$. Per questo motivo, anche le differenze z^n-w^n si ripeteranno con periodo 6, vale a dire che $z^{n+6}-w^{n+6}=z^n-w^n$. Quindi, per rispondere a 4/2 basta calcolare z^n-w^n per $n=0,1,2,3,4,5$. Si ottiene:

$z^0-w^0=0\ [=0+0i]$; $z^1-w^1=0+i\sqrt3$; $z^2-w^2=0+i\sqrt3$; $z^3-w^3=0$,
$z^4-w^4=-i\sqrt3$; $z^5-w^5=-i\sqrt3$. Poi: $z^6-w^6=z^0-w^0=0$, eccetera.

5) AUTOVALORI, AUTOVETTORI, DIAGONALIZZABILITA' DI $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&3&5\\5&0&-3\end{pmatrix}$.

Polinomio caratteristico: $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda&0&0\\1&3-\lambda&5\\5&0&-3-\lambda\end{pmatrix}=(3-\lambda)^2(-3-\lambda)$

le cui radici (autovalori di A) sono: $\lambda=3$ (doppio), $\lambda=-3$ (semplice)

AUTOVETTORI CORRISPONDENTI A $\lambda=3$: soluzioni di $(A-3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$: $\begin{cases}0=0\\x+5z=0\\5x-6z=0\end{cases}$ da cui $x=z=0$. Si ottengono i vettori del tipo $(0,y,0)$ con $y\in\mathbb{R}$ qualunque. L'autospazio ha dimensione 1, cioè 1 è la molteplicità geometrica dell'autovalore 3, minore della molteplicità algebrica, che e' 2. Se ne deduce che A **NON** e' diagonalizzabile per similitudine, né su $\mathbb{R}$, né su $\mathbb{C}$.

AUTOVETTORI CORRISPONDENTI A $\lambda=-3$: soluzioni di $(A+3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{cases}6x=0\\x+6y+5z=0\\5x=0\end{cases}$ da cui $x=0$, $y=-\frac56 z$. Si ottengono i vettori della forma $(0,-5t,6t)$ $\forall t\in\mathbb{R}$; l'autospazio ha (necessariamente) dimensione 1.