1) PROBLEMA DI CAUCHY: ① $2y''+y' = 8+6e^{2x}$; $y(0)=1$; $y'(0)=10$

E.D. omogenea associata: ② $2y''+y'=0$

Equazione caratteristica di ②: ③ $2\lambda^2+\lambda=0 \to \lambda=0 \vee \lambda=-\frac{1}{2}$

Soluzioni di ②: $\boxed{C_1+C_2e^{-\frac{1}{2}x}}$

Cerchiamo una soluzione $z(x)$ di: $2z''+z'=8$

Parametri di $f_1(x)=8$: $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$ ← perché 0 è soluzione semplice di ③

Allora $z(x)=A\cdot x$,
$z'=A$, $z''=0$; $2z''+z'=A$ desiderato $=8$. $\boxed{z(x)=8x}$

Cerchiamo una soluzione $w(x)$ di: $2w''+w'=6e^{2x}$

Parametri di $f_2(x)=6e^{2x}$: $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}$; $w(x)=Ae^{2x}$, da cui
$w'=2Ae^{2x}$, $w''=4Ae^{2x}$; $2w''+w'=10Ae^{2x}$, desiderato $=6e^{2x}$

Quindi $A=\frac{3}{5}$ e $\boxed{w(x)=\frac{3}{5}e^{2x}}$

SOLUZIONE GENERALE DI ①: $y(x)=8x+\frac{3}{5}e^{2x}+C_1+C_2e^{-\frac{1}{2}x}$

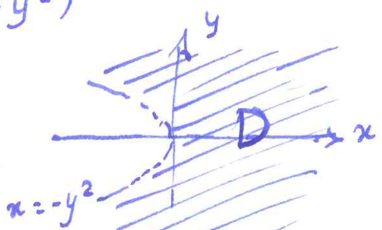
da cui: $y'(x)=8+\frac{6}{5}e^{2x}-\frac{1}{2}C_2e^{-\frac{1}{2}x}$

$\left.\begin{array}{l} y(0)=1 \\ y'(0)=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{3}{5}+C_1+C_2=1 \to C_1=2 \\ 8+\frac{6}{5}-\frac{1}{2}C_2=10 \to C_2=-\frac{8}{5} \end{array}\right.$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: $y(x)=8x+\frac{3}{5}e^{2x}+2-\frac{8}{5}e^{-1/2\,x}$, $x\in\,]-\infty,+\infty[$

2) DOMINIO, PUNTI CRITICI PER $f(x,y)=x^2\ln(x+y^2)$

• DOMINIO $D=\{(x,y);\ x+y^2>0\}$



• $f'_x = 2x\ln(x+y^2)+\dfrac{x^2}{x+y^2}=0$ ①

$f'_y = \dfrac{2x^2y}{x+y^2}=0$ ②

② → $x=0 \vee y=0$

SE $x=0$, ① diventa un'identità. Quindi tutti i punti $(0,y)$ con $y\neq0$ sono punti critici per f.

SE $y=0$ ① → $2x\ln x+x=0 \to x(2\ln x+1)=0 \to x=e^{-1/2}$

($x=0$ non è accettabile perché $(0,0)\notin D$). PUNTO CRITICO: $(e^{-1/2},0)$

CALCOLIAMO LA MATRICE HESSIANA.

$f''_{xx}=2\ln(x+y^2)+\frac{2x}{x+y^2}+\frac{2x(x+y^2)-x^2}{(x+y^2)^2}=2\ln(x+y^2)+\frac{4x}{x+y^2}-\frac{x^2}{(x+y^2)^2}$

$f''_{xy}=f''_{yx}=\frac{4xy(x+y^2)-2x^2y}{(x+y^2)^2}=\frac{2x^2y+4xy^3}{(x+y^2)^2}=\frac{2xy(x+2y^2)}{(x+y^2)^2}$

$f''_{yy}=\frac{2x^2(x+y^2)-4x^2y^2}{(x+y^2)^2}=\frac{2x^3-2x^2y^2}{(x+y^2)^2}$; allora

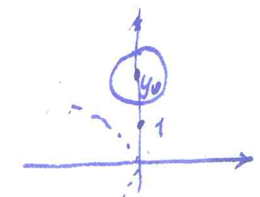
$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 2\ln(x+y^2)+\frac{4x}{x+y^2}-\frac{x^2}{(x+y^2)^2} & \frac{2xy(x+2y^2)}{(x+y^2)^2} \\ \frac{2xy(x+y^2\cdot2)}{(x+y^2)^2} & \frac{2x^2(x-y^2)}{(x+y^2)^2} \end{pmatrix}$$. Allora:

$H(e^{-1/2},0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2e^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$ definita positiva ($\det H=4e^{-\frac{1}{2}}>0$, $f''_{xx}=2>0$)
$\Rightarrow (e^{-1/2},0)$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO

$H(0,y)=\begin{pmatrix}2\ln(y^2)&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\det H=0$, la matrice hessiana non è adatta a classificare i punti critici $(0,y)$

CH. IND. 09.07.2013

Nei punti $(0,y)$ è $f(0,y)=0$. Se $|y_0|>1$, allora $\ln(0+y_0^2)>0$; quindi in un intorno di $(0,y_0)$ rimane $\ln(x+y^2)>0$, e allora $f(x,y)=x^2\ln(x+y^2)\geq0=f(0,y_0)$. I punti $(0,y_0)$ con $|y_0|>0$ sono PUNTI DI MINIMO RELATIVO per f.



Invece, se $|y_0|<1$ (con $y_0\neq0$), $\ln(0+y_0^2)<0$; ragionando analogamente a sopra segue che i punti $(0,y_0)$ con $0<|y_0|<1$ sono PUNTI DI MASSIMO RELATIVO per f.

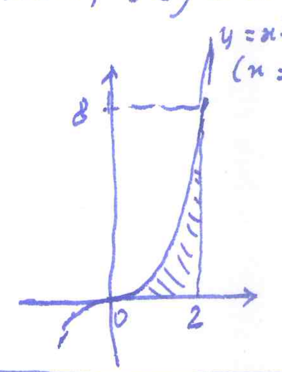
Infine, se $|y_0|=1$, allora $\ln(0+y_0^2)=0$, e in ogni intorno di $(0,y_0)$ si trovano sia punti in cui $f(x,y)>0$, sia punti in cui $f(x,y)<0$; i punti $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono PUNTI DI SELLA per f

3) INTEGRALE DOPPIO: $* \iint_A \frac{6x^2}{y^2-16y+65}\,dx\,dy$, $A=\{(x,y);\ 0\leq x\leq2;\ 0\leq y\leq x^3\}$

Conviene la riduzione "per linee orizzontali"

$$* = \int_0^8\left(\int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{6x^2}{y^2-16y+65}\,dx\right)dy=\int_0^8\left[\frac{2x^3}{y^2-16y+65}\right]_{x=\sqrt[3]{y}}^{x=2}dy=$$

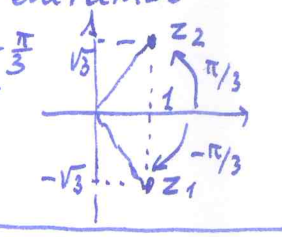
$$=\int_0^8\frac{16-2y}{y^2-16y+65}\,dy=-\left[\ln(y^2-16y+65)\right]_{y=0}^{y=8}=\ln(65)$$



4) SOLUZIONI IN $\mathbb{C}$ di: $z^2-2z+4=0$;
MODULO, ARGOMENTO, RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE SOLUZIONI

$z=1\pm\sqrt{1-4}=1\pm i\sqrt{3}$. MODULO $=\sqrt{1+3}=2$ per entrambe

Argomento: per $z_1=1-i\sqrt{3}$, $\arg(z_1)=\arctan(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$
per $z_2=1+i\sqrt{3}$, $\arg(z_2)=\arctan(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$



5) BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^2$ FORMATA DA AUTOVETTORI RELATIVI ALLA MATRICE $A=\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}$

• Polinomio caratteristico di A: $p(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\lambda&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-\lambda$

$\lambda^2-\lambda=0 \iff \lambda=\begin{cases}0\\1\end{cases}$.

Autovettori corrispondenti a $\lambda=0$: $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\\\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\end{cases} \to y=-x$

Un autovettore di norma 1: $\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$.

Autovettori corrispondenti a $\lambda=1$: $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0 \to y=x$; un autovettore di norma 1 è $\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$. La matrice che ha tali autovettori come ~~au~~ colonne, $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt2&1/\sqrt2\\-1/\sqrt2&1/\sqrt2\end{pmatrix}$ diagonalizza A, e rappresenta una rotazione perché il suo determinante vale 1, e $P^t=P^{-1}$.

L'angolo di rotazione è $-\frac{\pi}{4}$, perché $\cos(-\frac{\pi}{4})$, $\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4})$ sono i valori della prima colonna. L'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ rappresenta la PROIEZIONE ORTOGONALE dei vettori di $\mathbb{R}^2$ su S_1 (autospazio relativo a $\lambda=1$).