1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{-1}{(x+1)(2y+3)}$, $y(0)=0$

È una E.D. a variabili separabili, $y' = f(x)\cdot g(y)$ con:

$f(x) = \frac{-1}{x+1}$, $x \in]-1,+\infty[$; $g(y) = \frac{1}{2y+3}$, $y \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x+1)(2y+3)} \Rightarrow \int(2y+3)\,dy = \int \frac{-1}{x+1}dx \Rightarrow y^2+3y = -\ln|x+1| + C = -\ln(x+1)+C$, ⊠

l'ultimo passaggio dovuto al fatto che $x>-1$.

⊠ con $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ dà $0 = C$, quindi $y^2+3y+\ln(x+1)=0$ da cui

$y(x) = \frac12(-3 \pm \sqrt{9-4\ln(x+1)})$. Per avere $y(0)=0$, nel "$\pm$" si deve scegliere "+".

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: $y(x) = \frac12(-3+\sqrt{9-4\ln(x+1)})$

DOMINIO SOLUZIONE: $x>1$ e inoltre $9-4\ln(x+1)>0$, $\ln(x+1) < \frac94$, $x+1<e^{9/4}$, $x<-1+e^{9/4}$: Dom. = $]-1,-1+e^{9/4}[$.

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = 4x^3 - 3x^2y - 9x^2 - 8y^2$

$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 6xy - 18x = 0 & \text{(I)}\\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 - 16y = 0 & \text{(II)}\end{cases}$

(I) $\to 6x(2x-y-3)=0 \to x=0 \vee y = 2x-3$

SE $x=0$ (II) $\Rightarrow y=0$ PUNTO CRITICO: $(0,0)$

SE $\underset{**}{\boxed{y=2x-3}}$ (II) $\Rightarrow -3x^2-32x+48=0$; $x = \frac{16\pm20}{-3} = \begin{cases}\frac43\\ -12\end{cases}$

Da (**): $x=\frac43 \Rightarrow y=-\frac13$ PUNTO CRITICO $(\frac43,-\frac13)$

$x=-12 \Rightarrow y=-27$ PUNTO CRITICO $(-12,-27)$

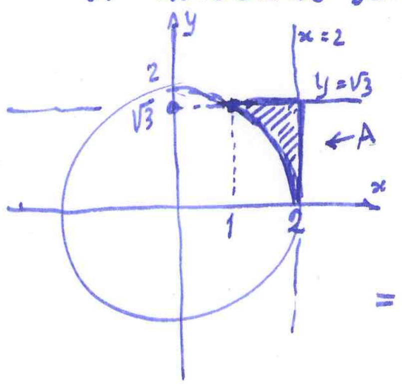
MATRICE HESSIANA: $H(x,y) = \begin{pmatrix}24x-6y-18 ; & -6x\\ -6x ; & -16\end{pmatrix}$.

$H(0,0)=\begin{pmatrix}-18&0\\0&-16\end{pmatrix}$; $\det H >0$, $f''_{xx} = -18<0 \Rightarrow (0,0)$ p. di MASSIMO RELATIVO

$H(\frac43,-\frac13) = \begin{pmatrix}16&-8\\-8&-16\end{pmatrix}$; $\det H < 0 \Rightarrow (\frac43,-\frac13)$ PUNTO DI SELLA

$H(-12,-27) = \begin{pmatrix}-144&72\\72&-16\end{pmatrix}$; $\det H <0 \Rightarrow (-12,-27)$ PUNTO DI SELLA

3) INTEGRALE DOPPIO: $* \iint_A (x^2y+y^3)\,dx\,dy$; $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\ge4,\ 0\le y\le\sqrt3;\ x\le2\}$



Riduzione con linee verticali

$* = \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt3} (x^2y+y^3)\,dy\right)dx = \int_1^2 \left[\frac12x^2y^2 - \frac14 y^4\right]_{y=\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt3} dx =$

$= \int_1^2\left(\frac32x^2 - \frac94 - \frac12x^2(4-x^2) - \frac14(4-x^2)^2\right)dx = \int_1^2\left(\frac14x^4+\frac32x^2-\frac{25}4\right)dx =$

$= \left[\frac1{20}x^5 + \frac12x^3 - \frac{25}4x\right]_{x=1}^{x=2} = \frac65$

(vedi Variante alla fine)

4) FORMA ALGEBRICA ED ESPONENZIALE DI $z = \frac{(\sqrt3+1)^3}{1-i\sqrt3}$.

1° modo $\sqrt3+i = 2(\frac{\sqrt3}2+\frac12 i) = 2e^{i\frac\pi6}$, quindi $(\sqrt3+1)^3 = 8e^{i\pi/2} (=+8i)$

$1-i\sqrt3 = 2(\frac12 - i\frac{\sqrt3}2) = 2e^{-i\frac\pi3}$. Allora:

$\frac{(\sqrt3+i)^3}{1-i\sqrt3} = \frac{8e^{i\pi/2}}{2e^{-i\pi/3}} = 4e^{i(\frac\pi2+\frac\pi3)} = \underbrace{4e^{5\pi/6\, i}}_{\text{FORMA ESPONENZIALE}} = 4\left(-\frac{\sqrt3}2+\frac12i\right) = \underbrace{-2\sqrt3+2i}_{\text{FORMA ALGEBRICA}}$

2° modo $\frac{(\sqrt3+i)^3}{1-i\sqrt3} = \frac{\cancel{3\sqrt3}+9i-\cancel{3\sqrt3}-i}{1-i\sqrt3} = \frac{8i}{1-i\sqrt3} = \frac{8i(1+i\sqrt3)}{1+3} = 2i(1+i\sqrt3) = -2\sqrt3+2i$;

$|-2\sqrt3+2i| = \sqrt{12+4} = 4$; argomento: (θ) $\tan\theta = \frac{2}{-2\sqrt3} = -\frac1{\sqrt3}$; $\operatorname{Re} z <0$

$\Rightarrow \theta = \pi + \arctan(-\frac1{\sqrt3}) = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow z = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

5) AUTOVALORI, AUTOVETTORI, MATRICE UNITARIA DIAGONALIZZANTE PER $A = \begin{pmatrix}1&1+i\\1-i&1\end{pmatrix}$

AUTOVALORI: $\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda&1+i\\1-i&1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2-2 = 0$ se $\lambda = 1\pm\sqrt2$

AUTOVETTORI con $\lambda = 1+\sqrt2$

$(A-(1+\sqrt2)I)\binom{x}{y} = \binom00 \to \begin{cases}-\sqrt2\,x+(1+i)y=0\\(1-i)x-\sqrt2\,y=0\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x=\frac{1+i}{\sqrt2}y\\ \frac{2}{\sqrt2}y-\sqrt2\,y=0 \text{ (identità)}\end{cases}$

Autovettori: $\left(\frac{1+i}{\sqrt2}y,\ y\right)$ $\forall y\in\mathbb{C}$

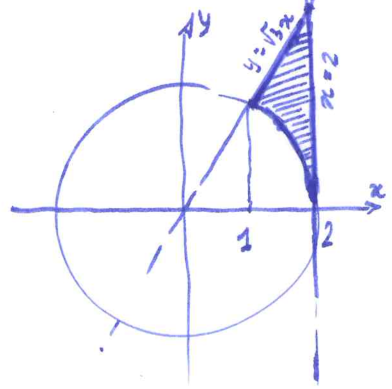
Base autospazio (normalizzata): $\{(\frac{1+i}{2}, \frac1{\sqrt2})\}$.

Gli autovettori con $\lambda = 1-\sqrt2$ sono quelli ortogonali in $\mathbb{C}^2$ a $(\frac{1+i}{2}, \frac1{\sqrt2})$; sono i vettori multipli di $(\frac{-1-i}{\sqrt2}, \frac1{\sqrt2})$

Una matrice U unitaria tale che $U^{-1}AU = \begin{pmatrix}1+\sqrt2&0\\0&1-\sqrt2\end{pmatrix}$ è

$U = \begin{pmatrix}\frac{1+i}2 & \frac{-1-i}{2}\\ \frac1{\sqrt2}&\frac1{\sqrt2}\end{pmatrix}$; l'inversa coincide con $\overline{U}^T = \begin{pmatrix}\frac{1-i}{2}&\frac1{\sqrt2}\\ \frac{-1+i}{2}&\frac1{\sqrt2}\end{pmatrix}$

3) VARIANTE INTEGRALE DOPPIO: ⊛ $\iint_A(x^2y+y^3)\,dx\,dy$; $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\ge4;\ 0\le y\le\sqrt3\cdot x,\ x\le2\}$



⊛ $= \int_1^2\left(\int_{\sqrt{4-x^2}}^{x\sqrt3}(x^2y+y^3)\,dy\right)dx = \int_1^2\left[\frac12x^2y^2+\frac14y^4\right]_{y=\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt3\cdot x}dx =$

$= \int_1^2\left(\frac32x^4+\frac94x^4 - \frac14(4-x^2)^2 - \frac12x^2(4-x^2)\right)dx =$

$= \int_1^2\left(\frac{15}4x^4 - 4 - \frac14x^4 + \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + \frac12x^4\right)dx = \int_1^2(4x^4-4)\,dx =$

$= \left[\frac45x^5-4x\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{128}5 - 8 - \frac45 + 4 = \frac{128-4-20}{5} = \frac{104}5$

CH. IND. 03.09.2013