CH. IND. 24.01.2014

1) PROBLEMA DI CAUCHY: (1) $5y''+2y'+y = 17\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$

E.D. omogenea associata: (2) $5y''+2y'+y=0$

Equazione caratteristica: (3) $5\lambda^2+2\lambda+1=0$; $\lambda = \frac{-1\pm 2i}{5} = -\frac{1}{5}\pm\frac{2}{5}i$

SOLUZIONI DI (2): $\boxed{C_1\, e^{-\frac{1}{5}x}\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+C_2\, e^{-\frac{1}{5}x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)}$

Cerchiamo una soluzione di (1). $f(x) = 17\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) e^{-}$ «(4)»

con $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$; perciò esiste una soluzione di (1) della forma:

$z(x) = A\cos\left(\frac{x}{2}\right)+B\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$. Le derivate 1ª e 2ª di z sono:

$z'(x) = -\frac{1}{2}A\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}B\cos\left(\frac{x}{2}\right)$; $z''(x) = -\frac{1}{4}A\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{4}B\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\to \left.\begin{array}{l} 5z'' \\ +2z' \\ +z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} -\frac{5}{4}A\cos\left(\frac{x}{2}\right) & -\frac{5}{4}B\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \\ +B\cos\left(\frac{x}{2}\right) & -A\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \\ +A\cos\left(\frac{x}{2}\right) & +B\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \end{array}\right.$$

$$= \left(-\frac{1}{4}A+B\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\left(-A-\frac{1}{4}B\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \text{ desiderato } = 17\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Allora bisogna che: $\begin{cases} -\frac{1}{4}A+B=0 \\ -A-\frac{1}{4}B=17 \end{cases} \to \begin{cases} B=\frac{1}{4}A \\ -A-\frac{1}{16}A=17 \end{cases} \to \begin{cases} B=\frac{1}{4}A \\ -\frac{17}{16}A=17 \end{cases}$

cioè $A=-16$; $B=-4$, e $z(x) = -16\cos\left(\frac{x}{2}\right)-4\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

SOLUZIONE GENERALE DI (1): $y(x) = -16\cos\left(\frac{x}{2}\right)-4\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+e^{-\frac{1}{5}x}\left(C_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)\right)$

DERIVATA: $y'(x) = 8\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)+$
$+\,e^{-x/5}\left(-\frac{1}{5}C_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)-\frac{1}{5}C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}\right)x-\frac{2}{5}C_1\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)+\frac{2}{5}C_2\cos\left(\frac{2}{5}x\right)\right)$

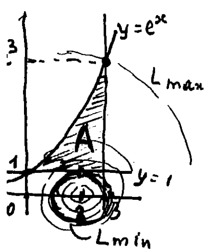
Allora $y(0) = -16+C_1$; $y'(0) = -2-\frac{1}{5}C_1+\frac{2}{5}C_2$. Poiché si vuole $y(0)=0$, $y'(0)=0$, deve essere $\begin{cases} -16+C_1=0 \\ -2-\frac{1}{5}C_1+\frac{2}{5}C_2=0 \end{cases}$ da cui

$C_1=16$; $-2-\frac{16}{5}+\frac{2}{5}C_2=0 \to \frac{2}{5}C_2=\frac{26}{5}$, $C_2=13$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: $y(x) = -16\cos\left(\frac{x}{2}\right)-4\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+e^{-\frac{1}{5}x}\left(16\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+13\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)\right)$, $x\in\,]-\infty,+\infty[$

---

2) MINIMO, MASSIMO DI $f(x,y) = x^2+y^2-4x$ in $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\le y\le e^x,\ x\le 3\}$

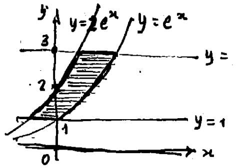


Le linee di livello di f sono circonferenze con centro (2,0); $x^2+y^2-4x=k$ è una circonferenza di raggio $r_k = \sqrt{4+k}$. Il minimo k per cui L_k interseca A è quello per cui $r_k=1$, cioè $k=-3$; il punto di tangenza di L_{-3} e con A è (2,1) (PUNTO DI MINIMO). Il massimo k per cui L_k interseca A è quello per cui L_k passa per $(3,e^3)$: $k = 3^2+e^6-12 = e^6-3$ MASSIMO

PUNTO DI MASSIMO

---

3) $\iint_A e^x\sqrt[3]{y^2-1}\,dx\,dy$; $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\le y\le 3,\ e^x\le y\le 2e^x\}$



Osserviamo che $y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$; $y=2e^x \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y}{2}\right)$.

Allora $\iint_A e^x\sqrt[3]{y^2-1}\,dx\,dy = \int_1^3\left(\int_{\ln(\frac{y}{2})}^{\ln y} e^x\sqrt[3]{y^2-1}\,dx\right)dy =$

$= \int_1^3\left[e^x\cdot\sqrt[3]{y^2-1}\right]_{x=\ln\frac{y}{2}}^{x=\ln y} dy = \int_1^3 \frac{1}{2}y\cdot\sqrt[3]{y^2-1}\,dy =$

$= \frac{1}{4}\int_1^3 (y^2-1)^{\frac{1}{3}}\cdot 2y\,dy = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\left[(y^2-1)^{\frac{4}{3}}\right]_{y=1}^{y=3} = \frac{3}{16}(16-0) = \underline{\underline{3}}$

---

4) Calcolo in $\mathbb{C}$: I) forma trig. e esponenziale di $z=1+i\sqrt{3}$ e di $\bar{z}$
II) Calcolo di $\frac{(1+i\sqrt{3})^{11}}{1-i\sqrt{3}}$

I) $|z| = \rho = \sqrt{1+3} = 2$; $\theta = \arg z = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Quindi $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

e $\bar{z} = 1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

II) $\frac{z^{11}}{\bar{z}} = \frac{2^{11}e^{\frac{11}{3}\pi i}}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}} = 2^{10}\cdot e^{\frac{12}{3}\pi i} = 2^{10}e^{4\pi i} = 2^{10} = 1024$

---

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 3 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$

I) Calcolare det A
II) Autovalori(*), autovettori di A (*) $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$
III) M matrice ortogonale tale che $M^TAM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

I) $\det A = 3\cdot\left(1\cdot(-1)-(-\sqrt{3})^2\right) = -12$

II) Autovalori: $\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2-1-3) = (3-\lambda)(\lambda^2-4)$

Autovalori: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$
Si noti che $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3 = -12 = \det A$

Autovettori con $\lambda=3$: $\begin{cases} -2x & -\sqrt{3}z=0 \\ -\sqrt{3}x & -4z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $y\in\mathbb{R}$

Autovettori con $\lambda=2$: $\begin{cases} -x & -\sqrt{3}z=0 \\ y & =0 \\ -\sqrt{3}x & -3z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-\sqrt{3}z \\ y=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $z\in\mathbb{R}$

Autovettori con $\lambda=-2$: $\begin{cases} 3x & -\sqrt{3}z=0 \\ y & =0 \\ -\sqrt{3}x & +z=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=0 \\ z=\sqrt{3}x \end{cases} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \sqrt{3}x \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$

Scegliamo un autovettore per ciascuno dei tre autovalori; e poi lo "normalizziamo" dividendolo per la sua norma:

- Per $\lambda_1=3$: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, già di norma 1
- Per $\lambda_2=2$: $v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha norma 2; $w_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ ha norma 1
- Per $\lambda_3=-2$: $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ ha norma 2; $w_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ ha norma 1

v_1, w_2, w_3 hanno norma 1 e sono a due a due ortogonali, perché A è simmetrica, e v_1, w_2, w_3 sono autovettori associati ad autovalori diversi. Una matrice M con le caratteristiche richieste è:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = M.$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & w_2 & w_3 \end{array}$$