1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{8xy}{4x^2+1} + 12x^2$; $y(0) = 2$

E' una E.D. lineare di ordine 1, « $y' = a\cdot y + b$ » con $a(x) = \frac{8x}{4x^2+1}$, $b(x) = 12x^2$, $x \in]-\infty, +\infty[$.

$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{8x}{1+4x^2}\,dx = \ln(1+4x^2)$; le soluzioni della equazione differenziale sono, per ogni $C \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = e^{A(x)}\left(C + \int b(x)e^{-A(x)}dx\right) = e^{\ln(1+4x^2)}\left(C + \int 12x^2 \cdot e^{-\ln(1+4x^2)}dx\right) =$$

$$= (1+4x^2)\left(C + \int \frac{12x^2}{1+4x^2}dx\right) = (1+4x^2)\left(C + \int \frac{3+12x^2-3}{1+4x^2}dx\right) =$$

$$= (1+4x^2)\left(C + \int\left(3 - 3\frac{1}{1+4x^2}\right)dx\right) = (1+4x^2)\left(C + 3x - \frac{3}{2}\arctan(2x)\right).$$

Ricaviamo C imponendo $y(0) = 2$:

$y(0) = C$, quindi occorre $C = 2$. La soluzione del problema di Cauchy è: $y(x) = (1+4x^2)\left(2 + 3x - \frac{3}{2}\arctan(2x)\right)$, $x \in]-\infty, +\infty[$

2) DETERMINARE E CLASSIFICARE I PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = x^4 - 8y - 2x^2y + 2y^2$

CH. IND. 31.01.2014

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 4xy = 0 & (1) \\ f'_y = -8 - 2x^2 + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \to 4x(x^2-y) = 0 \to x = 0 \lor y = x^2$

SE $x = 0$: $(2) \to 4y = 8 \to y = 2$ da cui è P.C. $(0,2)$

SE $x^2 = y$: $(2) \to -8 - 2y + 4y = 0 \to y = 4$; allora $x^2 = 4$, $x = \pm 2$, cosicché altri due punti critici sono $(2,4)$, $(-2,4)$

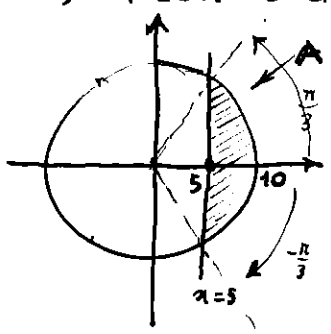
LA MATRICE HESSIANA di f è: $H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-4y & -4x \\ -4x & 4 \end{pmatrix}$; allora:

$H(0,2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\det H = -32 < 0 \Rightarrow (0,2)$ punto di SELLA per f

$H(2,4) = \begin{pmatrix} 32 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$; $\det H = 64$, $f''_{xx} = 32 \Rightarrow (2,4)$ punto di MINIMO RELATIVO per f

$H(-2,4) = \begin{pmatrix} 32 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$; $\det H = 64$, $f''_{xx} = 32 \Rightarrow (-2,4)$ punto di MINIMO RELATIVO per f.

3) INTEGRALE DOPPIO: $\iint_A \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 100,\ x \ge 5\}$



• RISOLUZIONE CON COORDINATE POLARI: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

$\iint_A \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \iint_B \frac{\rho\cos\theta}{\rho^4}\rho\,d\rho\,d\theta$ con:

$B = \{(\rho,\theta);\ \theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}];\ \rho \in [\frac{5}{\cos\theta}, 10]\}$.

$$\iint_B \frac{\cos\theta}{\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(\int_{5/\cos\theta}^{10}\frac{\cos\theta}{\rho^2}\,d\rho\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{-\cos\theta}{\rho}\right]_{\rho=\frac{5}{\cos\theta}}^{\rho=10}d\rho =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{1}{10}\cos\theta + \frac{1}{5}\cos^2\theta\right)d\theta =$$

[una primitiva di $\cos^2\theta$ è: $\int\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int(1+2\cos(2\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta))$]

$$= \left[-\frac{1}{10}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{10}\left(\theta + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta)\right)\right]_{\theta=-\frac{\pi}{3}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{10}\sqrt{3} + \frac{1}{10}\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{15} - \frac{1}{20}\sqrt{3}$$

•• RISOLUZIONE CON RIDUZIONE CARTESIANA:

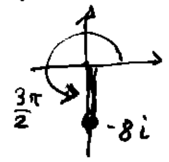
$$\iint_A \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_{-5\sqrt{3}}^{5\sqrt{3}}\left(\int_5^{\sqrt{100-y^2}}\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)dy = \int_{-5\sqrt{3}}^{5\sqrt{3}} -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right]_{x=5}^{x=\sqrt{100-y^2}}dy =$$

$$= \int_{-5\sqrt{3}}^{5\sqrt{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25+y^2} - \frac{1}{100}\right)dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\arctan\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{1}{100}x\right]_{x=-5\sqrt{3}}^{x=5\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{15} - \frac{1}{20}\sqrt{3}$$

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $z^3 + 8i = 0$. (Scrivere le soluzioni in forma algebrica e esponenziale; rappresentarle graficamente)

⊛ $z^3 = -8i$ $|-8i| = 8$; $\arg(-8i) = \frac{3\pi}{2} = \gamma$ (oppure $-\frac{\pi}{2}$)

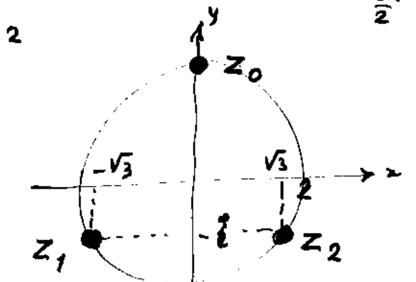


LE SOLUZIONI DI ⊛ sono:

$z = z_k = \sqrt[3]{8}\cdot e^{(\frac{\gamma}{3} + \frac{2k\pi}{3})i}$, $k = 0, 1, 2$

$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i$; $z_1 = 2e^{\frac{7}{6}\pi i} = -\sqrt{3} - i$

$z_2 = 2e^{\frac{11}{6}\pi i} = \sqrt{3} - i$



5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$, data;

5/1 CALCOLARE $B = A\cdot A^T$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

5/2 AUTOVALORI, AUTOVETTORI DI B: $p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 4-\lambda \end{pmatrix} =$

$= \lambda^2 - 6\lambda + 5$; $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1 \lor \lambda = 5)$ (autovalori).

Autovettori relativi a $\lambda = 1$: $\begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ -\sqrt{3}x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}y$. Una base dell'autospazio, con vettore di norma 1, è $\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\}$.

Poiché B è simmetrica e ciascun autospazio (in questo esempio) ha dimensione 1, l'autospazio relativo all'autovalore 5 è il complemento ortogonale dell'altro autospazio. Quindi una base (con elemento di norma 1) dell'autospazio relativo a $\lambda = 5$ è: $\left\{\begin{pmatrix} -1/2 \\ +\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\right\}$.

(Altrimenti, potevamo risolvere il sistema $(B - 5I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

5/3 SCRIVERE M MATRICE ORTOGONALE CON $\det M = 1$, TALE CHE $M^TBM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\left(= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)$

Le colonne di M debbono essere vettori di una base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale e spettrale per B. Scegliendo in modo opportuno il verso dei vettori si potrà avere per M il determinante 1 oppure -1.

La matrice $M = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ ha il determinante 1, come richiesto.

Il calcolo diretto mostra che $M^TBM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Siccome $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{2} = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} \end{cases}$, M rappresenta una rotazione di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$, vale a dire che gli autospazi relativi a $\lambda = 1$ e $\lambda = 5$ si ottengono ruotando di $\frac{\pi}{6}$ rispettivamente l'asse x e l'asse y.