1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \dfrac{2xy+3y}{2\ln(\frac{y}{2})}$; $y(-4) = 2e^2$

E' una E.D. a var separabili, con:

$f(x) = 2x+3$, $x \in I =]-\infty, +\infty[$; $g(y) = \dfrac{y}{2\ln(\frac{y}{2})}$, $y \in J =]2, +\infty[$

$\dfrac{dy}{dx} = (2x+3)\dfrac{y}{2\ln(\frac{y}{2})} \rightarrow \int 2\ln(\frac{y}{2}) \cdot \frac{1}{y}\, dy = \int (2x+3)\, dx \rightarrow$

$\rightarrow (\ln(\frac{y}{2}))^2 = x^2 + 3x + C \quad (*)$; $\left.\begin{array}{l} x=-4 \\ y = 2e^2 \end{array}\right\}$ in (*) dà: $4 = 4 + C$, $\boxed{C=0}$.

quindi (*) diventa: $(\ln(\frac{y}{2}))^2 = x^2+3x$, e allora

$\ln(\frac{y}{2}) = (\pm)\sqrt{x^2+3x}$. Si deve scegliere il segno + in $(\pm)$ affinché l'uguaglianza sia soddisfatta per $\begin{cases} x=-4 \\ y = 2e^2 \end{cases}$.

Segue che: $\frac{y}{2} = e^{\sqrt{x^2+3x}}$, e infine: $\boxed{y(x) = 2e^{\sqrt{x^2+3x}}}$

DOMINIO DELLA SOLUZIONE: deve essere $x^2+3x>0$; ciò accade se $x>0$ oppure $x<-3$; l'intervallo contenente $x_0=-4$ è $\underline{I_0 =]-\infty, -3[}$

---

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = y^2 \ln(x^2+y)$

CH. IND 12.02.2014

$f(x,y)$ è definita nel dominio $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y>0\}$.

$\begin{cases} f'_x = \dfrac{2xy^2}{x^2+y} = 0 \quad (I) \longrightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ \vee \\ y=0 \end{array} \\ f'_y = 2y\ln(x^2+y) + \dfrac{y^2}{x^2+y} \quad (II) \end{cases}$ | SE $x=0$, (II) dà: $2y\ln y + y = 0 \rightarrow y(2\ln y+1)=0 \rightarrow y=0 \vee y = e^{-1/2}$.

$(0,0)\notin A$; $(0, e^{-1/2})$ è un punto critico per f.

SE $y=0$, la (II) è un'identità. Sono punti critici $(x,0)$, $\forall y \in \mathbb{R}-\{0\}$

CALCOLO DELLA MATRICE HESSIANA. $f''_{xx} = \dfrac{2y^2(x^2+y)-4x^2y^2}{(x^2+y)^2} = \dfrac{2y^2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$;

$f''_{xy} = f''_{yx} = \dfrac{4xy(x^2+y)-2xy^2}{(x^2+y)^2} = \dfrac{2xy(2x^2+y)}{(x^2+y)^2}$;

$f''_{yy} = 2\ln(x^2+y) + \dfrac{2y}{x^2+y} + \dfrac{2y(x^2+y)-y^2}{(x^2+y)^2} = 2\ln(x^2+y) + \dfrac{y(4x^2+3y)}{(x^2+y)^2}$

$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2y^2(y-x^2)}{(x^2+y)^2} & \dfrac{2xy(2x^2+y)}{(x^2+y)^2} \\ \dfrac{2xy(2x^2+y)}{(x^2+y)^2} & 2\ln(x^2+y) + \dfrac{y(4x^2+3y)}{(x^2+y)^2} \end{pmatrix}$; $H(0, e^{-1/2}) = \begin{pmatrix} 2e^{-1/2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

$\det H(0, e^{-1/2}) = 4e^{-\frac{1}{2}} > 0$, e $f''_{xx} > 0$; quindi $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ è punto di MINIMO RELATIVO per f.

Nei punti ~~tra~~ $(x,0)$ con $x\neq 0$, è $f(x,y)=0$. Sia $(x_0,0)$ uno di questi punti, con $|x_0|>1$ (per esempio, supponiamo $x_0>1$). Allora $\ln(x_0^2+0)>0$, e in un intorno di $(x_0,0)$ si mantiene $\ln(x^2+y)>0$, e quindi anche $y^2\ln(x^2+y)\geq 0$.

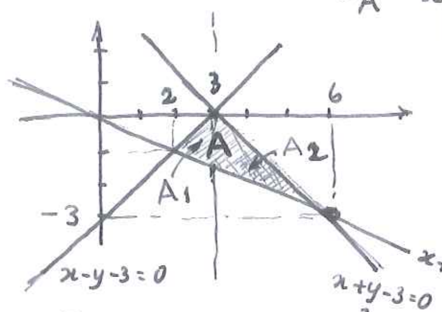
Quindi $(x_0,0)$ con $|x_0|>1$ è PUNTO DI MINIMO RELATIVO per f.

Se invece $0<|x_0|<1$ allora $\ln(x_0^2+0)<0$; ragionando come sopra si conclude che $(x_0,0)$ con $0<|x_0|<1$ è PUNTO DI MASSIMO RELATIVO per f.

Infine, $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono PUNTI DI SELLA per f, perché in ogni intorno di ciascuno dei due ci sono punti in cui $f(x,y)<0$ e punti in cui $f(x,y)>0$, (essendo $=0$ il valore di f nel punto $(x_0,0)$).

---

3) Calcolare: $\iint_A \frac{1}{x}\, dx\, dy$; $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x+2y\geq 0;\ x+y-3\leq 0;\ x-y-3\geq 0\}$



L'integrale va calcolato separando A in due parti. L'integrazione è più semplice secondo linee verticali; quindi separiamo la parte di A in cui $x\leq 3$ e la parte di A in cui $x\geq 3$, siano rispettivamente A_1 e A_2

$$\iint_A \frac{1}{x}\, dx\, dy = \iint_{A_1} \frac{1}{x}\, dx\, dy + \iint_{A_2} \frac{1}{x}\, dx\, dy.$$

$\iint_{A_1} \frac{1}{x}\, dx\, dy = \int_2^3 \left(\int_{-\frac{1}{2}x}^{x-3} \frac{1}{x}\, dy \right) dx = \int_2^3 \left[\frac{y}{x}\right]_{y=-\frac{1}{2}x}^{y=x-3} dx = \int_2^3 \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{x}\right) dx =$

$= \left[\frac{3}{2}x - 3\ln x\right]_{x=2}^{x=3} = \boxed{\frac{3}{2} - 3\ln\frac{3}{2}}$;

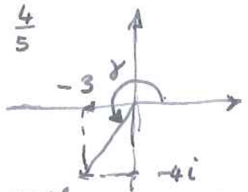
$\iint_{A_2} \frac{1}{x}\, dx\, dy = \int_3^6 \left(\int_{-\frac{1}{2}x}^{3-x} \frac{1}{x}\, dy \right) dx = \int_3^6 \left[\frac{y}{x}\right]_{y=-\frac{1}{2}x}^{y=3-x} dx = \int_3^6 \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{2}\right) dx =$

$= \left[3\ln x - \frac{1}{2}x\right]_{x=3}^{x=6} = \boxed{3\ln 2 - \frac{3}{2}}$. Allora: $\iint_{A_1} f + \iint_{A_2} f = 3\ln 2 - 3\ln\frac{3}{2} = 3\ln\frac{4}{3}$

---

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $\underline{z^2 - 3z + 3 + i = 0}$.

Il discriminante dell'equazione di secondo grado è $\Delta = 9 - 4(3+i) = -3-4i$. Di questo occorrono le "radici quadrate complesse", ossia i $w \in \mathbb{C}$ tali che $w^2 = -3-4i$. Poiché $|-3-4i| = 5$, e l'argomento γ di w deve avere $\cos\gamma = \frac{-3}{5}$, $\operatorname{sen}\gamma = -\frac{4}{5}$, le "radici quadrate sono: $w = \pm\sqrt{5}\,(\cos(\frac{\gamma}{2}) + i\operatorname{sen}(\frac{\gamma}{2}))$. Ora, le formule di bisezione danno: $\cos^2(\frac{\gamma}{2}) = \frac{1}{2}(1+\cos\gamma) = \frac{1}{5}$, $\operatorname{sen}^2(\frac{\gamma}{2}) = \frac{1}{2}(1-\cos\gamma) = \frac{4}{5}$



e siccome $\frac{\gamma}{2}$ è nel 2° quadrante, $\cos(\frac{\gamma}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

e $\operatorname{sen}(\frac{\gamma}{2}) = +\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Allora i valori di w sono

w (" $\sqrt{\Delta}$ ") $= \pm(-1+2i)$, e le soluzioni della equazione di 2° grado assegnata sono: $z = \dfrac{3\pm\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{3\pm(-1+2i)}{2} = \begin{cases} 1+i \\ 2-i \end{cases}$

---

5) TROVARE K IN MODO CHE $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sia autovalore per $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4-k & k \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

LA MATRICE A OTTENUTA, E' DIAGONALIZZABILE? (motivare)

$A \cdot v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4-k & k \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3k-4 \\ -4 \end{pmatrix}$ che si vuole sia multiplo di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Osservando la terza componente si nota che il fattore di proporzionalità deve essere -2 , quindi bisogna che $3k-4 = -2\cdot(-1) = 2$, $3k=6$, $\underline{k=2}$.

Per tale k è $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calcoliamo gli autovalori di A così fatta (un autovalore è certamente (-2)). $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (2-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda)$. Gli autovalori sono: $\lambda = 2$ [DOPPIO] e $\lambda = -2$ [SEMPLICE]. Per sapere se A è diagonalizzabile basta trovare la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore doppio $\lambda = 2$; questa è uguale a $3 - \text{rango}(A-2I)$. Ora si ha:

$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ che ha rango 2; perciò la dimensione dell'autospazio è $3-2=1$, minore della molteplicità algebrica dell'autovalore 2, che è uguale a 2.

La matrice A, con $k=2$, NON è diagonalizzabile.

1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{2xy+3y}{2\ln(\frac{y}{2})}$; $y(-4) = 2e^2$

E' una E.D. a var separabili, con:

$f(x) = 2x+3$, $x \in I =]-\infty,+\infty[$; $g(y) = \frac{y}{2\ln(\frac{y}{2})}$, $y \in J =]2,+\infty[$

$\frac{dy}{dx} = (2x+3)\frac{y}{2\ln(\frac{y}{2})} \to \int 2\ln(\frac{y}{2})\cdot\frac{1}{y}\,dy = \int(2x+3)\,dx \to$

$\to (\ln(\frac{y}{2}))^2 = x^2+3x+C$ (*) ; $\left.\begin{matrix}x=-4\\y=2e^2\end{matrix}\right\}$ in (*) dà: $4 = 4+C$, $\boxed{C=0}$.

quindi (*) diventa: $(\ln(\frac{y}{2}))^2 = x^2+3x$, e allora

$\ln(\frac{y}{2}) = (\pm)\sqrt{x^2+3x}$. Si deve scegliere il segno + in (±) affinché l'uguaglianza sia soddisfatta per $\begin{cases}x=-4\\y=2e^2\end{cases}$.

Segue che: $\frac{y}{2} = e^{\sqrt{x^2+3x}}$, e infine: $\boxed{y(x) = 2e^{\sqrt{x^2+3x}}}$

DOMINIO DELLA SOLUZIONE: deve essere $x^2+3x>0$; ciò accade se $x>0$ oppure $x<-3$; l'intervallo contenente $x_0=-4$ è $I_0 =]-\infty,-3[$

---

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = y^2\ln(x^2+y)$

CH. IND 12.02.2014

$f(x,y)$ è definita nel dominio $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y>0\}$.

$\begin{cases} f'_x = \frac{2xy^2}{x^2+y} = 0 \quad (I) \longrightarrow x=0 \vee y=0 \\ f'_y = 2y\ln(x^2+y) + \frac{y^2}{x^2+y} \quad (II)\end{cases}$

SE $x=0$, (II) dà: $2y\ln y + y = 0 \to y(2\ln y+1)=0 \to y=0 \vee y=e^{-1/2}$.

$(0,0)\notin A$; $(0,e^{-1/2})$ è un punto critico per f.

SE $y=0$, la (II) è un'identità. Sono punti critici $(x,0)$, $\forall y\in\mathbb{R}-\{0\}$

CALCOLO DELLA MATRICE HESSIANA. $f''_{xx} = \frac{2y^2(x^2+y)-4x^2y^2}{(x^2+y)^2} = \frac{2y^2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$;

$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{4xy(x^2+y)-2xy^2}{(x^2+y)^2} = \frac{2xy(2x^2+y)}{(x^2+y)^2}$;

$f''_{yy} = 2\ln(x^2+y) + \frac{2y}{x^2+y} + \frac{2y(x^2+y)-y^2}{(x^2+y)^2} = 2\ln(x^2+y) + \frac{y(4x^2+3y)}{(x^2+y)^2}$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{2y^2(y-x^2)}{(x^2+y)^2} & \frac{2xy(2x^2+y)}{(x^2+y)^2}\\ \frac{2xy(2x^2+y)}{(x^2+y)^2} & 2\ln(x^2+y)+\frac{y(4x^2+3y)}{(x^2+y)^2}\end{pmatrix}; \quad H(0,e^{-1/2}) = \begin{pmatrix}2e^{-1/2}&0\\0&2\end{pmatrix};$$

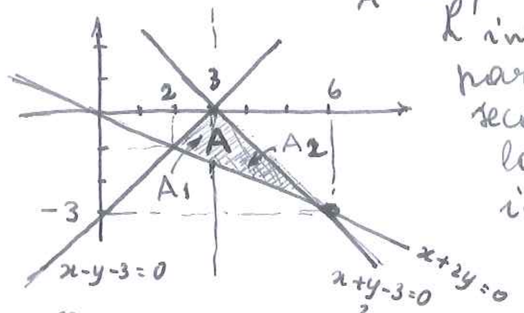
$\det H(0,e^{-1/2}) = 4e^{-\frac12}>0$, e $f''_{xx}>0$; quindi $(0,e^{-\frac12})$ è punto di MINIMO RELATIVO per f.

Nei punti $(x,0)$ con $x\neq0$, è $f(x,y)=0$. Sia $(x_0,0)$ uno di questi punti, con $|x_0|>1$ (per esempio, supponiamo $x_0>1$). Allora $\ln(x_0^2+0)>0$, e in un intorno di $(x_0,0)$ si mantiene $\ln(x^2+y)>0$, e quindi anche $y^2\ln(x^2+y)\ge0$. Quindi $(x_0,0)$ con $|x_0|>1$ è PUNTO DI MINIMO RELATIVO per f.

Se invece $0<|x_0|<1$ allora $\ln(x_0^2+0)<0$; ragionando come sopra si conclude che $(x_0,0)$ con $0<|x_0|<1$ è PUNTO DI MASSIMO RELATIVO per f. Infine, $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono PUNTI DI SELLA per f, perché in ogni intorno di ciascuno dei due ci sono punti in cui $f(x,y)<0$ e punti in cui $f(x,y)>0$, (essendo $=0$ il valore di f nel punto $(x_0,0)$.

---

3) Calcolare: $\iint_A \frac{1}{x}\,dx\,dy$; $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x+2y\ge0;\ x+y-3\le0;\ x-y-3\ge0\}$



L'integrale va calcolato separando A in due parti. L'integrazione è più semplice secondo linee verticali; quindi separiamo la parte di A in cui $x\le3$ e la parte di A in cui $x\ge3$, siano rispettivamente A_1 e A_2

$\iint_A \frac1x\,dx\,dy = \iint_{A_1}\frac1x\,dx\,dy + \iint_{A_2}\frac1x\,dx\,dy$.

$\iint_{A_1}\frac1x\,dx\,dy = \int_2^3\left(\int_{-\frac12x}^{x-3}\frac1x\,dy\right)dx = \int_2^3\left[\frac yx\right]_{y=-\frac12x}^{y=x-3}dx = \int_2^3\left(\frac32-\frac3x\right)dx =$

$= \left[\frac32x - 3\ln x\right]_{x=2}^{x=3} = \boxed{\frac32 - 3\ln\frac32}$;

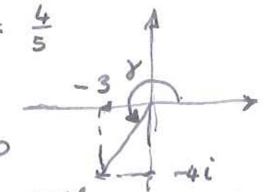
$\iint_{A_2}\frac1x\,dx\,dy = \int_3^6\left(\int_{-\frac12x}^{3-x}\frac1x\,dy\right)dx = \int_3^6\left[\frac yx\right]_{y=-\frac12x}^{y=3-x}dx = \int_3^6\left(\frac3x-\frac12\right)dx =$

$= \left[3\ln x - \frac12x\right]_{x=3}^{x=6} = \boxed{3\ln2-\frac32}$. Allora: $\iint_{A_1}f + \iint_{A_2}f = 3\ln2 - 3\ln\frac32 = 3\ln\frac43$

---

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $z^2-3z+3+i=0$.

Il discriminante dell'equazione di secondo grado è $\Delta = 9-4(3+i) = -3-4i$. Di questo occorrono le "radici quadrate complesse", ossia i $w\in\mathbb{C}$ tali che $w^2=-3-4i$. Poiché $|-3-4i|=5$, e l'argomento γ di w deve avere $\cos\gamma = -\frac35$, $\text{sen}\,\gamma = -\frac45$, le "radici quadrate sono: $w = \pm\sqrt5\left(\cos(\frac\gamma2)+i\,\text{sen}(\frac\gamma2)\right)$. Ora, le formule di bisezione danno: $\cos^2(\frac\gamma2) = \frac12(1+\cos\gamma)=\frac15$, $\text{sen}^2(\frac\gamma2) = \frac12(1-\cos\gamma)=\frac45$



e siccome $\frac\gamma2$ è nel 2° quadrante, $\cos(\frac\gamma2) = -\frac1{\sqrt5}$ e $\text{sen}(\frac\gamma2) = +\sqrt{\frac45} = \frac2{\sqrt5}$. Allora i valori di w sono w ("$\sqrt\Delta$") $= \pm(-1+2i)$, e le soluzioni della equazione di 2° grado assegnata sono: $z = \frac{3\pm\sqrt\Delta}{2} = \frac{3\pm(-1+2i)}{2} = \begin{cases}1+i\\2-i\end{cases}$

---

5) TROVARE K IN MODO CHE $v = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ sia autovalore per $A = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&4-k&k\\1&0&-2\end{pmatrix}$. LA MATRICE A OTTENUTA, E' DIAGONALIZZABILE? (motivare)

$A\cdot v = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&4-k&k\\1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3k-4\\-4\end{pmatrix}$ che si vuole sia multiplo di $v = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

Osservando la terza componente si nota che il fattore di proporzionalità deve essere -2, quindi bisogna che $3k-4 = -2\cdot(-1) = 2$, $3k=6$, $\underline{k=2}$.

Per tale k è $A = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&2\\1&0&-2\end{pmatrix}$. Calcoliamo gli autovalori di A così fatta (un autovalore è certamente (-2)). $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix}2-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&2\\1&0&-2-\lambda\end{pmatrix} =$ $= (2-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda)$. Gli autovalori sono: $\lambda=2$ [DOPPIO] e $\lambda=-2$ [SEMPLICE]. Per sapere se A è diagonalizzabile basta trovare la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore doppio $\lambda=2$; questa è uguale a $3-\text{rango}(A-2I)$. Ora si ha: $A-2I = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\1&0&-4\end{pmatrix}$ che ha rango 2; perciò la dimensione dell'autospazio è $3-2=1$, minore della molteplicità algebrica dell'autovalore 2, che è uguale a 2. La matrice A, con $k=2$, NON è diagonalizzabile.