1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = 3x\sqrt[3]{y+2}$; $y(\sqrt{5}) = -1$

È una equazione differenziale a variabili separabili, $y' = f(x)\cdot g(y)$ con $f(x) = 3x$, $x \in I =]-\infty,+\infty[$; $g(y) = \sqrt[3]{y+2}$, $y \in J =]-2,+\infty[$.

$\frac{dy}{dx} = 3x\sqrt[3]{y+2} \rightarrow \int (y+2)^{-\frac{1}{3}}\,dy = \int 3x\,dx$; $\frac{3}{2}(y+2)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}x^2 + C$ (*)

$\left.\begin{matrix} x=\sqrt{5} \\ y=-1 \end{matrix}\right\}$ in (*) $\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{15}{2} + C \Rightarrow C = -6$, e allora (*) diventa: $\frac{3}{2}(y+2)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}x^2 - 6$

da cui: $(y+2)^{2/3} = x^2-4$; $y+2 = \pm(x^2-4)^{3/2}$; bisogna scegliere il segno + , per avere $y(\sqrt{5}) = -1$. La soluzione del problema di Cauchy è pertanto: $y(x) = -2 + (x^2-4)^{3/2}$.

DOMINIO DELLA SOLUZIONE: deve essere $x^2-4>0$, $x \in]-\infty,-2[\cup]+2,+\infty[$; di questi due intervalli scegliamo quello che contiene $x_0 = \sqrt{5}$: il dominio è perciò $]2,+\infty[$.

---

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = -y^2\ln(x^2+y^2)$ $((x,y)\neq(0,0))$: DETERMINARLI E CLASSIFICARLI.

$$\begin{cases} f'_x = \dfrac{-2xy^2}{x^2+y^2} = 0 & (1) \\ f'_y = -2y\ln(x^2+y^2) - \dfrac{2y^3}{x^2+y^2} = 0 & (2) \end{cases} \qquad (1) \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ \vee \\ y=0 \end{matrix}$$

SE $x=0$, (2) $\rightarrow -2y\ln(y^2) - 2y = 0 \rightarrow -2y(\ln(y^2)+1) = 0$.
Non può essere $y=0$, perché $(0,0) \notin Dom(f)$; allora $\ln(y^2) = -1$, $y^2 = e^{-1}$, $y = \pm e^{-1/2}$. DUE PUNTI CRITICI PER f SONO: $(0, \pm e^{-1/2})$

SE $y=0$, (2) diventa una identità. Sono punti critici $(x,0)$, per ogni $x \neq 0$.

Costruiamo ora la matrice hessiana.

$$f''_{xx} = \frac{-2y^2(x^2+y^2)+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xy} = \frac{-4xy(x^2+y^2)+4xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^3y}{(x^2+y^2)^2} \qquad (= f''_{yx})$$

$$f''_{yy} = -2\ln(x^2+y^2) - \frac{4y^2}{x^2+y^2} - \frac{6y^2(x^2+y^2)-4y^4}{(x^2+y^2)^2}$$; perciò:

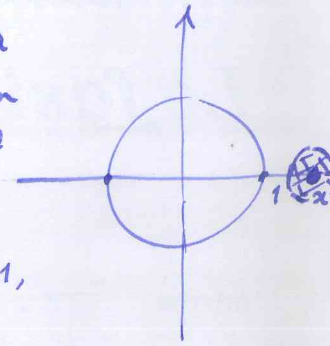
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{-4x^3y}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{-4x^3y}{(x^2+y^2)^2} & -2\ln(x^2+y^2) - \dfrac{4y^2}{x^2+y^2} - \dfrac{2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Risulta $H(0,\pm e^{-\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$; è $\det H = 8 > 0$, $f''_{xx} = -2 < 0$ (inoltre, sono pure visibili gli autovalori, -2 e -4; $H(0,\pm e^{-\frac{1}{2}})$ è perciò DEFINITA NEGATIVA). I punti $(0,\pm e^{-\frac{1}{2}})$ sono PUNTI DI MASSIMO RELATIVO per f.

Nei punti $(x,0)$ è $H(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\ln(x^2) \end{pmatrix}$, che ha il determinante uguale a 0, e non permette quindi la classificazione dei punti critici.

CH. IND. 23.04.2014

Osserviamo allora che $f(x_0,0) = 0$ per ogni $x_0 \neq 0$, e studiamo il valore di $f(x,y)$ vicino a ciascuno di questi punti.

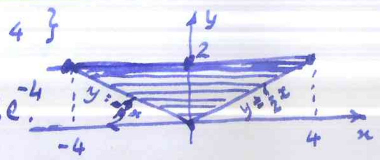


SE $|x_0| > 1$ (vedi figura, nella quale è $x_0 > 1$), allora $\ln(x_0^2+0^2) = \ln(x_0^2) > 0$, quindi $\ln(x^2+y^2) > 0$ in un intorno di $(x_0,0)$, e siccome $y^2 \geq 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$, in tale intorno di $(x_0,0)$ avremo $f(x,y) \leq 0 = f(x_0,0)$; quindi $(x_0,0)$ è PUNTO DI MASSIMO RELATIVO per f.
Con analogo ragionamento si prova che se $0 < |x_0| < 1$, allora $(x_0,0)$ è PUNTO DI MINIMO RELATIVO per f; infine, se $x_0 = 1$ oppure $x_0 = -1$, $(x_0,0)$ è PUNTO DI SELLA per f

---

3) INTEGRALE DOPPIO: $\iint_A e^{-y^2}dx\,dy$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 2y \leq 4\}$

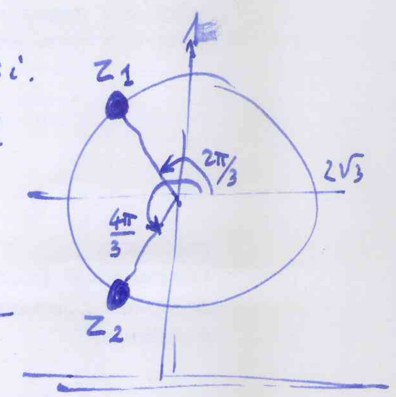
$$\iint_A e^{-y^2}dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{-2y}^{2y} e^{-y^2}dx \right) dy = \int_0^2 4y e^{-y^2}dy = \left[-2e^{-y^2} \right]_{y=0}^{y=2} = 2 - 2e^{-4}.$$



---

4) SOLUZIONI IN $\mathbb{C}$ di: $z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$ ⊛

$\frac{\Delta}{4} = 3 - 12 = -9$, le cui "radici quadrate" in $\mathbb{C}$ sono: $\pm 3i$.
Le soluzioni di ⊛ sono: $z = -\sqrt{3} \pm 3i$. Per entrambe il modulo è: $\sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; l'argomento è, rispettivamente, $\pi + \arctan(\mp\sqrt{3}) = \pi \mp \frac{\pi}{3} = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} \text{ (per } -\sqrt{3}+3i) = z_1 \\ \frac{4\pi}{3} \text{ (per } -\sqrt{3}-3i) = z_2 \end{cases}$



---

5) DETTO $\underline{v} = (1,1,2)$, SIA $A = \underline{v}^T \cdot \underline{v}$. Calcolare rango A, determinare gli autovalori per A, e una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale formata da autovettori per A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & (4-\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2(4-\lambda) + 8 - 8(1-\lambda) - 4 + \lambda = \cancel{4} - \cancel{8\lambda} + 4\lambda^2 - \cancel{\lambda} + 2\lambda^2 - \lambda^3 + \cancel{8\lambda} - \cancel{4} + \cancel{\lambda}$$

$= -\lambda^2(\lambda - 6)$. Gli autovalori sono: $\lambda = 0$ (doppio); $\lambda = 6$ (semplice)

Autovettori con autovalore $\lambda = 0$: soluzioni di $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, equivalente a $x + y + 2z = 0$, $x = -y - 2z$, ossia $(x,y,z) = (-y-2z, y, z)$ (*) $\forall y,z \in \mathbb{R}$

Per es. $(y=1, z=0)$: $u_1 = (-1,1,0)$. Un secondo autovettore, ortogonale a u_1 è (*) tale che: $\langle u_1, (*) \rangle = 0$ cioè $y + 2z + y = 0$, $z = -y$, per esempio $y=1, z=-1$: $u_2 = (1,1,-1)$.

Autovettori con autovalore $\lambda = 6$: soluzioni di $(A - 6I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} -5x + y + 2z = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = 5x - 2z \\ -24x + 12z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x \\ z = 2x \\ \text{identità} \end{cases}$ $\rightarrow$ autovalori $(x, x, 2x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, per esempio $u_3 = (1,1,2)$.

Posto $w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; $w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$, $w_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

$\{w_1, w_2, w_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ spettrale per A.