1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \dfrac{3x^2 y}{2\ln y}$; $y(2) = \dfrac{1}{e}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 y}{2\ln y}$; $\displaystyle\int \frac{2\ln y}{y}\,dy = \int 3x^2\,dx$;

$f(x) = 3x^2$; $x \in I =]-\infty, +\infty[$

$g(y) = \dfrac{y}{2\ln y}$; $y \in J =]0, 1[$

$(\ln y)^2 = x^3 + C$ (*)

$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = \frac{1}{e} \end{matrix}\right\}$ in (*) $\Rightarrow$ $1 = 8 + C$ $\Rightarrow C = -7$ cosicché (*) dà: $(\ln y)^2 = x^3 - 7$, da cui $\ln y = -\sqrt{x^3 - 7}$ (il segno $-$ perché l'uguaglianza sia soddisfatta quando $x = 2$ e $y = \frac{1}{e}$); infine:

$\boxed{y(x) = e^{-\sqrt{x^3-7}}}$ ← soluzione del problema di Cauchy

DOMINIO DELLA SOLUZIONE: $x^3 - 7 > 0$, $x > \sqrt[3]{7}$: $D :=]\sqrt[3]{7}, +\infty[$

---

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = (x-y)e^{-x+y^2}$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$

$f'_x = e^{-x+y^2} + (x-y)e^{-x+y^2} \cdot (-1) = e^{-x+y^2}(-x+y+1)$

$f'_y = -e^{-x+y^2} + e^{-x+y^2} \cdot 2y \cdot (x-y) = e^{-x+y^2}(2xy - 2y^2 - 1)$

I punti critici sono le soluzioni del sistema:

$\begin{cases} -x+y+1 = 0 & (1) \\ 2xy - 2y^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$ $\quad (1) \to x = y+1$

$(2) \to 2(y+1)y - 2y^2 - 1 = 0$

$\to \cancel{2y^2} + 2y \cancel{-2y^2} - 1 = 0 \to y = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{3}{2}$

C'è un solo punto critico $(x,y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Calcoliamo la matrice hessiana.

$f''_{xx} = -e^{-x+y^2}(-x+y+1) + e^{-x+y^2} \cdot (-1) = e^{-x+y^2}(x-y-2)$

$f''_{xy} = e^{-x+y^2} \cdot 2y \cdot (-x+y+1) + e^{-x+y^2} = e^{-x+y^2}(2y^2 - 2xy + 2y + 1) = f''_{yx}$

$f''_{yy} = e^{-x+y^2} \cdot 2y\,(2xy - 2y^2 - 1) + e^{-x+y^2}(2x - 4y) = e^{-x+y^2}(4xy^2 - 4y^3 - 6y + 2x)$

$H(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x+y^2}(x-y-2) & e^{-x+y^2}(2y^2 - 2xy + 2y + 1) \\ e^{-x+y^2}(2y^2 - 2xy + 2y + 1) & e^{-x+y^2}(4xy^2 - 4y^3 - 6y + 2x) \end{pmatrix}$

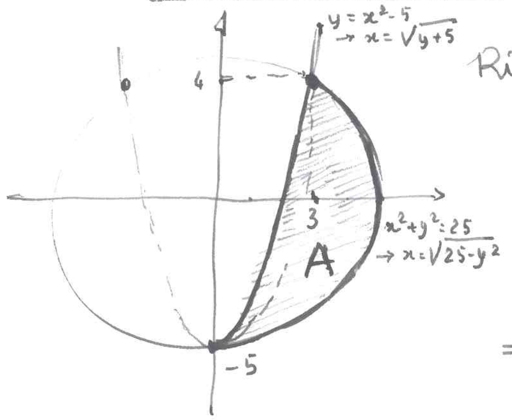
$H\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -e^{-5/4} & e^{-5/4} \\ e^{-5/4} & e^{-5/4} \end{pmatrix}$; $\det H\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -2e^{-\frac{5}{2}} < 0$

Perciò il punto critico $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è un PUNTO DI SELLA.

CH. IND. 09.07.2014

---

3) INTEGRALE DOPPIO: $\displaystyle\iint_A \frac{2x}{y+6}\,dx\,dy$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \leq x^2 - 5,\ x^2 + y^2 \leq 25\}$



Risolvendo il sistema $\begin{cases} y = x^2 - 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ si ricavano i punti $(3,4)$ e $(-3,4)$ $(\notin A)$.

Conviene effettuare la riduzione per linee orizzontali:

$\displaystyle\iint_A \frac{2x}{y+6}\,dx\,dy = \int_{-5}^{4} \left(\int_{\sqrt{y+5}}^{\sqrt{25-y^2}} \frac{2x}{y+6}\,dx \right) dy =$

$\displaystyle = \int_{-5}^{4} \left[\frac{x^2}{y+6} \right]_{x = \sqrt{y+5}}^{x = \sqrt{25-y^2}} dy = \int_{-5}^{4} \frac{20 - y^2 - y}{y+6}\,dy$

DIVISIONE:

$\begin{array}{r|l} -y^2 - y + 20 & y+6 \\ \hline y^2 + 6y & -y + 5 \quad Q. \\ 5y + 20 & \\ -5y - 30 & \\ -10 \quad R & \end{array}$

$\displaystyle\int_{-5}^{4} \frac{20 - y - y^2}{y+6}\,dy = \int_{-5}^{4} \left(-y + 5 - \frac{10}{y+6}\right) dy =$

$= \left[-\frac{1}{2}y^2 + 5y - 10\ln(y+6) \right]_{y=-5}^{y=4} =$

$= -8 + 20 - 10\ln 10 + \frac{25}{2} + 25 = \boxed{\frac{99}{2} - 10\ln 10}$

---

4) MODULO E (UN) ARGOMENTO DI $z = (4+3i)(3+\sqrt{3}i)^4$

Conviene ricordare che: se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ allora $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, e $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg(z_2)$, e infine, $\arg(z_1^n) = n \arg(z_1)$, per ogni numero intero n. Nel caso attuale abbiamo:

$|4+3i| = \sqrt{16+9} = 5$; $|3+\sqrt{3}i| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$; $|3+\sqrt{3}i|^4 = 16 \cdot 9 = 144$;

quindi $|z| = 5 \cdot 144 = 720$. Poi: $\arg(4+3i) = \arctan\frac{3}{4}$;

$\arg(3+\sqrt{3}i) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$, quindi $\arg((3+\sqrt{3}i)^4) = 4 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$;

perciò $\arg z = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{2\pi}{3}$.

---

5) Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$. Determinare k in modo che $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sia autovettore per A; con tale valore di k determinare gli autovalori di A e una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori per A.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2-2k \end{pmatrix}$. Affinché $\begin{pmatrix} -4 \\ 2-2k \end{pmatrix}$ sia multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bisogna che $2 - 2k = -4 \cdot (-2)$, $-2k = 6$, $k = -3$. Così $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è: $p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 12$ le cui radici sono: $\lambda = -4$, $\lambda = 3$. L'autovalore $\lambda = -4$ era in effetti già noto, e una base del corrispondente autospazio è $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

Autovettori associati a $\lambda = 3$: $(A - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cioè $\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases}$, da cui $x = 3y$. Una base dell'autospazio è $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori per A è $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.