1) PROBLEMA DI CAUCHY: ① $4y'' + y = 2x^2+3$; $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 6$

E.D. omogenea associata: ② $4y''+y=0$; Eq. caratteristica di ②: ③ $4\lambda^2+1=0$

Soluzioni di ③: $\lambda = \pm \frac{1}{2} i$; Soluzione generale di ②: $\boxed{C_1 \cos(\frac{x}{2}) + C_2 \,\mathrm{sen}(\frac{x}{2})}$

Ricerca di una soluzione di ①: $f(x) = 2x^2+3 \; e^-$ ④ con $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$,

quindi cerchiamo una soluzione di ① della forma:

$z(x) = ax^2+bx+c$, da cui $z' = 2ax+b$, $z'' = 2a$;

$4z''+z = 8a + ax^2+bx+c$, desiderato $= 2x^2+3$; perciò: $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ 8a+c=3 \end{cases}$

cioè $a=2$, $b=0$, $c=-13$ e $z(x) = 2x^2-13$.

SOLUZIONE GENERALE DI ①: $y(x) = 2x^2-13 + C_1 \cos(\frac{x}{2}) + C_2 \,\mathrm{sen}(\frac{x}{2})$

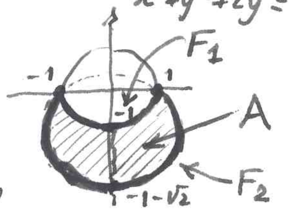
$\rightarrow y'(x) = 4x - \frac{1}{2} C_1 \,\mathrm{sen}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2} C_2 \cos(\frac{x}{2})$

$\begin{array}{l} y(\pi) = \\ y'(\pi) = \end{array} \begin{cases} 2\pi^2 - 13 + C_2 = 1 \\ 4\pi - \frac{1}{2} C_1 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 = 14 - 2\pi^2 \\ C_1 = 8\pi - 12 \end{cases}$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: $y(x) = 2x^2-13 + (8\pi-12)\cos(\frac{x}{2}) + (14-2\pi^2)\,\mathrm{sen}(\frac{x}{2})$, $x \in \,]-\infty, +\infty[$

---

2) MINIMO, MASSIMO ASSOLUTO DI $f(x,y) = \dfrac{4x^2}{4y-5}$ IN $A = \{(x,y);\ x^2+y^2 \geq 1,\ x^2+y^2+2y \leq 1\}$



$x^2+y^2=1$: Cerchio con centro $(0,0)$ e raggio 1

$x^2+y^2+2y=1$: Cerchio con centro $(0,-1)$ e raggio $\sqrt{2}$

I due cerchi si intersecano nei punti $(\pm 1, 0)$

Eventuali punti critici per f, interni ad A, si trovano risolvendo il sistema $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$; ~~[illegible]~~

$\begin{array}{l} f'_x = \\ f'_y = \end{array} \begin{cases} \frac{8x}{4y-5} = 0 \\ \frac{-16x^2}{(4y-5)^2} = 0 \end{cases} \rightarrow$ Punti $(0,y)$, con $y \in \,]-1-\sqrt{2}, -1[$, affinché $(0,y) \in A$

In questi punti f vale: $f(0,y) = 0$ (massimo assoluto di f in A, perché $f(x,y) \leq 0 \;\; \forall (x,y) \in A$)

CH. IND. 05. 09. 2014

STUDIO DI f SU $Fr.A$. $Fr.A = F_1 \cup F_2$

$F_1 = \{(x,y);\ x^2+y^2=1;\ y \leq 0\}$. Se $(x,y) \in F_1$ allora $x^2 = 1-y^2$ e

$f(x,y) = \dfrac{4-4y^2}{4y-5} = g_1(y)$, $y \in [-1, 0]$.

$g_1'(y) = \dfrac{1}{(4y-5)^2}\left(-8y(4y-5) - 4(4-4y^2)\right) = \dfrac{-8}{(4y-5)^2}(2y^2-5y+2)$;

$g_1'(y) = 0 \iff y = \dfrac{5 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}$; 2 entrambi $\notin [-1, 0]$.

$F_2 = \{(x,y);\ x^2+y^2+2y=1;\ y \in [-1-\sqrt{2}, 0]\}$. Se $(x,y) \in F_2$ allora

$x^2 = 1-2y-y^2$ e $f(x,y) = 4\dfrac{1-2y-y^2}{4y-5} = g_2(y)$, $y \in [-1-\sqrt{2}, 0]$.

$g_1(-1) = 0$
$g_1(0) = -\frac{4}{5}$
$g_2(-1-\sqrt{2}) = 0$
$g_2(-\frac{1}{2}) = -1$

$g_2(-1-\sqrt{2}) = 4\dfrac{1+2+2\cancel{\sqrt{2}}-1-2-\cancel{2\sqrt{2}}}{-4-4\sqrt{2}-5} = 0$; $g_2(0) = -\frac{4}{5}$ (già noto)

$g_2'(y) = \dfrac{4}{(4y-5)^2}\left((-2-2y)(4y-5) - 4(1-2y-y^2)\right) = \dfrac{-8}{(4y-5)^2}(2y^2-5y-3)$

$g_2'(y) = 0 \iff y = \dfrac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \notin [-1-\sqrt{2}, 0] \\ -\frac{1}{2} \in [-1-\sqrt{2}, 0] \end{cases}$

$g_2(-\frac{1}{2}) = 4\dfrac{1+1-\frac{1}{4}}{-2-5} = -1$.

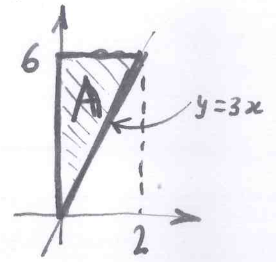
Conclusione:

$\min\{f(x,y);\ (x,y) \in A\} = -1$

$\max\{f(x,y);\ (x,y) \in A\} = 0$

---

3) INTEGRALE DOPPIO: $\iint_A \dfrac{y}{x+3}\,dx\,dy$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq \frac{y}{3} \leq 2\}$



$\iint_A \dfrac{y}{x+3}\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{3x}^{6} \dfrac{y}{x+3}\,dy \right) dx =$

$= \int_0^2 \frac{1}{2}\left[\dfrac{y^2}{x+3}\right]_{y=3x}^{y=6} dx = \int_0^2 \frac{9}{2}\,\dfrac{4-x^2}{x+3}\,dx$

$\begin{array}{l|l} -x^2 \quad +4 & x+3 \\ \underline{x^2+3x} & \underline{-x+3} \\ \quad 3x+4 & \;\; Q \\ \underline{-3x-9} & \\ \quad -5 = R & \end{array}$

$= \dfrac{9}{2}\int_0^2 \left(-x+3 - \dfrac{5}{x+3}\right)dx =$

$= \dfrac{9}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2+3x-5\ln(x+3)\right]_{x=0}^{x=2} = \dfrac{9}{2}\left(4 - 5\ln\frac{5}{3}\right)$

---

4) Dato $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$: a) Scrivere z in forma esponenziale $\rho e^{i\theta}$, $\rho \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$

b) Scrivere z^7 in forma algebrica $a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

a) $\rho = |z| = \sqrt{2+2} = 2$; $\theta = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \arctan(-1) = -\pi/4$

$\rightarrow z = 2e^{-i\pi/4}$

b) $z^7 = 2^7 e^{i(-7\pi/4)} = 2^7\left(\cos(-\frac{7}{4}\pi) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{7}{4}\pi)\right) = \underbrace{2^6\sqrt{2}}_{a} + \underbrace{2^6\sqrt{2}}_{b}\,i$

---

5) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare

- autovalori di A
- rango di A
- una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2+5\lambda)$

$p(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{0, 2, -5\}$.

Autovettori con $\lambda = 0$: soluzioni di $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

l'autospazio ha dim. 1 perché rango $A = 2$;

$\begin{cases} -4x \quad +z = 0 \\ \quad 2y \quad = 0 \end{cases} \rightarrow (x,y,z) = (x, 0, 4x)$

Base autospazio: $\{(1, 0, 4)\}$

Autovettori con $\lambda = 2$: soluzioni di $(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$\begin{cases} -6x \quad +z = 0 \\ 4x \quad -3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow (x,y,z) = (0, y, 0) \quad \forall y$

Base autospazio: $\{(0, 1, 0)\}$

Autovettori con $\lambda = -5$: soluzioni di $(A + 5I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\begin{cases} x \quad +z = 0 \\ \quad 7y \quad = 0 \\ 4x \quad +4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (x,y,z) = (x, 0, -x) \quad \forall x$

Base autospazio $\{(1, 0, -1)\}$

Una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A è:

$\mathcal{B} = \{(1,0,4);\ (0,1,0);\ (1,0,-1)\}$