(1

1) PROBLEMA DI CAUCHY: ① $8y''+2y'-3y = 100e^{\frac{1}{2}x}$; $y(0)=5$, $y'(0)=10$

E.D. omogenea associata: ② $8y''+2y'-3y=0$

Eq. Caratteristica di ②: ③ $8\lambda^2+2\lambda-3=0 \to \lambda = \frac{1}{8}(-1\pm5) = \begin{cases}-3/4\\ 1/2\end{cases}$

Soluzione generale di ②: $\boxed{C_1 e^{-\frac{3}{4}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}}$

Ricerca di una soluzione di ①: $f(x) = 100e^{\frac{1}{2}x}$ è ④ con $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1\end{array}$

perciò c'è una soluzione di ① della forma ⑤' $\underline{z(x) = A x e^{x/2}}$

da cui: $z'(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}Axe^{\frac{x}{2}}$; $z''(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}Axe^{\frac{x}{2}}$; allora:

$$\left.\begin{array}{r} 8z'' \\ +2z' \\ -3z \end{array}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{x}{2}}\,[\,8A + 2Ax \\ \quad + 2A + Ax \\ \quad\quad -3Ax\,] \end{array}\right.$$

$= \underline{e^{\frac{x}{2}} \cdot 10A}$, desiderato $= 100e^{\frac{x}{2}}$ → Allora deve essere $10A = 100$; $A = 10$. quindi $\underline{z(x) = 10xe^{\frac{x}{2}}}$.

La soluzione generale di ① è: $\underline{y(x) = 10xe^{\frac{1}{2}x} + C_1e^{-\frac{3}{4}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}}$

Segue che $y'(x) = 10e^{\frac{1}{2}x} + 5xe^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{4}C_1e^{-\frac{3}{4}x} + \frac{1}{2}C_2e^{\frac{1}{2}x}$ e allora

$$\begin{array}{l} y(0) = \\ y'(0) = \end{array}\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ 10 - \frac{3}{4}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 10 \end{cases};\ \begin{cases} C_2 = 5 - C_1 \\ \cancel{10} - \frac{3}{4}C_1 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}C_1 = \cancel{10} \end{cases};\ \frac{5}{4}C_1 = \frac{5}{2};\ C_1 = 2 \qquad C_2 = 5-2 = 3$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = 10xe^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{3}{4}x} + 3e^{\frac{1}{2}x}, \quad x \in \,]-\infty, +\infty[$$

CH. IND. 23.01.2015

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = \underline{-60x + 45x^2 - 8x^3 + 48y + 24xy + 48y^2}$

$$\begin{array}{l} f'_x = \\ f'_y = \end{array}\begin{cases} -60 + 90x - 24x^2 + 24y = 0 \\ 48 + 24x + 96y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -60 + 90x - 24x^2 - 12 - 6x = 0 & ① \\ 2 + x + 4y = 0 \to y = \frac{-2-x}{4} & ⑪ \end{cases}$$

① $-24x^2 + 84x - 72 = 0$; $2x^2 - 7x + 6 = 0$; $x = \frac{1}{4}(7\pm1) = \begin{cases}3/2\\2\end{cases}$

Da ⑪: se $x = \frac{3}{2}$ allora $y = -\frac{7}{8}$; se $x = 2$ allora $y = -1$

Ci sono due punti critici: $P = \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{8}\right)$; $Q = (2,-1)$

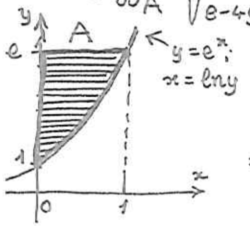
La matrice hessiana per f è: $H(x,y) = \begin{pmatrix} 90-48x & 24 \\ 24 & 96 \end{pmatrix}$ perciò:

$H\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{8}\right) = \begin{pmatrix} 18 & 24 \\ 24 & 96\end{pmatrix}$; $\det H = 18\cdot96 - 24^2 > 0$, $f''_{xx} = 18 > 0$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{8}\right)$ è punto di MINIMO RELATIVO per f

$H(2,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 24 \\ 24 & 96\end{pmatrix}$; $\det H = -6\cdot96 - 24^2 < 0 \Rightarrow (2,-1)$ è PUNTO DI SELLA per f.

3) ⊛ $\iint_A \frac{3e^{3x}}{\sqrt{8-4y+y^4}}\,dx\,dy$, $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ e^x \leq y \leq e\}$



Conviene integrare per linee orizzontali:

$$⊛ = \int_1^e \left(\int_0^{\ln y} \frac{3e^{3x}}{\sqrt{8-4y+y^4}}\,dx\right) dy =$$

$$= \int_1^e \left[\frac{e^{3x}}{\sqrt{8-4y+y^4}}\right]_{x=0}^{x=\ln y} = \int_1^e \frac{y^3-1}{\sqrt{8-4y+y^4}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^e (8-4y+y^4)^{-1/2} \cdot \underbrace{(4y^3-4)}_{\text{derivata di } 8-4y+y^4}\,dy = \frac{1}{4}\left[2(8-4y+y^4)^{1/2}\right]_{y=1}^{y=e} =$$

$$= \frac{1}{2}\left((8-4e+e^4)^{1/2} - 5^{1/2}\right)$$

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: ⊛ $z^2 - 4z + 4 - 8i = 0$; dette z_1, z_2 le soluzioni, scrivere $\frac{z_1}{z_2}$ e $\frac{z_2}{z_1}$ in forma algebrica $a+bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

⊛ $\iff z = 2 \pm \sqrt{\cancel{4}-\cancel{4}+8i} = 2 \pm 2\sqrt{2i}$; « $\pm\sqrt{2i}$ » qui indica le radici quadrate complesse di $2i$, cioè $w \in \mathbb{C}$ tale che $w^2 = 2i$.

Siccome $|2i| = 2$ e $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$, è $w = \pm\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm(1+i)$

e allora $z = 2 \pm 2(1+i) = \begin{cases} -2i = z_1 \\ 4+2i = z_2 \end{cases}$. Adesso abbiamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2i}{4+2i} = \frac{-i}{2+i} = \frac{-i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-1-2i}{5} = \underline{\underline{-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i}}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{4+2i}{-2i} = \frac{-2}{i} - 1 = \underline{\underline{-1+2i}}$$

5) SIA $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare $B = A\cdot A^T$; calcolare gli autovalori di A e una base per l'autospazio relativo all'autovalore reale della matrice A.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -4 & 0 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ -4 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 64 = -(\lambda-4)(\lambda^2+4\lambda+16)$$

Gli autovalori sono dati da: $\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 4}}$; $\lambda^2 + 4\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -2 \pm 2\sqrt{3}\,i}}$

Autovettori relativi a $\lambda = 4$: soluzioni del sistema $(A - 4I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$;

$$\begin{cases} -4x - 4y = 0 \\ -4y + 4z = 0 \\ -4x - 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ \text{identità} \\ z = -x \end{cases}$$

L'autospazio è:

$S = \{(x, -x, -x);\ x \in \mathbb{R}\}$; una base per S è: $\mathcal{B} = \{(1,-1,-1)\}$