CH. IND. 27.01.2015

1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{8x+3}{2y} e^{-y^2}$; $y(-2) = \sqrt{2\ln 3}$

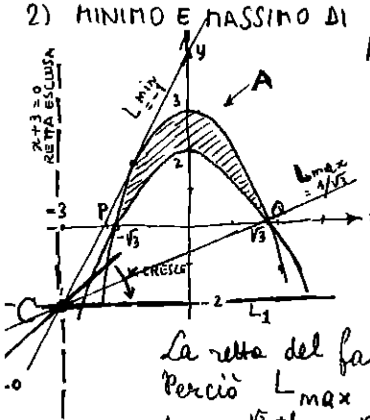
È una e.d. a variabili separabili, $y' = f(x)\cdot g(y)$ con:
$f(x) = 8x+3$, $x \in I =]-\infty, +\infty[$; $g(y) = \frac{e^{-y^2}}{2y}$, $y \in J =]-\infty, 0[$

$\frac{dy}{dx} = \frac{8x+3}{2y} e^{-y^2}$; $\int \frac{2y}{e^{y^2}} dy = \int (8x+3)\,dx$; $\boxed{e^{y^2} = 4x^2+3x+C}$ *

$\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=\sqrt{2\ln 3}\end{array}\right\}$ in * $\Rightarrow$ $9 = 16-6+C \to C=-1$, e quindi * diventa:
$e^{y^2} = 4x^3+3x-1$ da cui $y^2 = \ln(4x^3+3x-1)$ e $\boxed{y(x) = \sqrt{\ln(4x^3+3x-1)}}$ ⊙

⊙ è l'espressione della soluzione del problema di Cauchy. Il suo dominio risulta dalle condizioni $\begin{cases} 4x^3+3x-1>0 \\ \ln(4x^3+3x-1)>0\end{cases}$; il sistema equivale a: $4x^3+3x-1>1$, $4x^3+3x-2>0$. Poiché $4x^3+3x-2=0$ se $x = \frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}$, la disequazione è soddisfatta se $x \in \left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{41}}{8}\right[\cup \left]\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, +\infty\right[$
Il dominio della soluzione è l'intervallo $\left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{41}}{8}\right[$, perché è l'intervallo che contiene $x_0 = -2$.

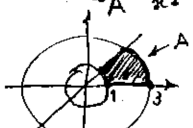
2) MINIMO E MASSIMO DI $f(x,y) = \frac{x-y+1}{x+3}$ in $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 2-\frac{2}{3}x^2 \le y \le 3-x^2\}$



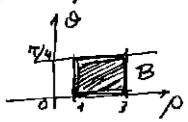
A è delimitato da due archi di parabola che si intersecano nei punti $P=(-\sqrt{3},0)$, $Q=(\sqrt{3},0)$.
Le linee di livello di f sono
$L_k = \left\{(x,y),\ \frac{x-y+1}{x+3} = k\right\}$; la relazione (*) equivale, per $x \neq -3$, a: $x-y+1 = k(x+3)$.
Si tratta delle rette di un fascio proprio il cui centro risulta da $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+3=0\end{cases}$, cioè $C=(-3,-2)$
La retta del fascio ruota in senso orario quando k cresce. Perciò L_{max} passa per $Q=(\sqrt{3},0)$, per la quale è $k = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; L_{min} è tangente alla parabola $y = 3-x^2$. Svolgiamo il calcolo.

$\begin{cases} y = 3-x^2 \\ x-y+1 = kx+3k\end{cases} \to x-3+x^2+1-kx-3k=0 \to x^2+(1-k)x-2-3k=0$
$\Delta = 1+k^2-2k+8+12k = k^2+10k+9$. $\Delta=0$ se $k = \begin{cases}-1 \\ -9\end{cases}$;
la retta tangente nell'arco PQ si ha per $k=-1$; quest'ultimo valore è dunque il minimo di f in A. Quindi: $\min_{(x,y)\in A} f(x,y) = -1$, $\max_{(x,y)\in A} f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3) $\iint_A \frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$, $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\le x^2+y^2\le 9;\ 0\le y\le x\}$



Applichiamo il cambiamento di variabili in coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\end{cases}$. L'insieme $B = \{(\rho,\theta), (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\in A\}$ è $B = \{(\rho,\theta),\ 1\le\rho\le 3,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$

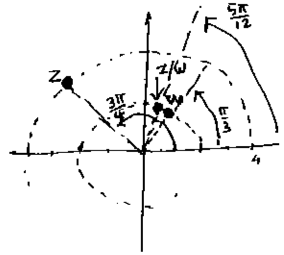


perciò $\iint_A \frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy = \iint_B \frac{1}{\rho^2\cos^2\theta} e^{\tan\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = \iint_B \frac{1}{\rho}\frac{1}{\cos^2\theta} e^{\tan\theta}\,d\theta$

$= \int_1^3 \left(\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{1}{\cos^2\theta} e^{\tan\theta}}_{\text{derivata di } e^{\tan\theta}} d\theta\right) d\rho = \int_1^3 \frac{1}{\rho}\left[e^{\tan\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} d\rho =$
$= \int_1^3 \frac{1}{\rho}(e-1) = (e-1)[\ln\rho]_{\rho=1}^{\rho=3} = \boxed{(e-1)\cdot\ln 3}$

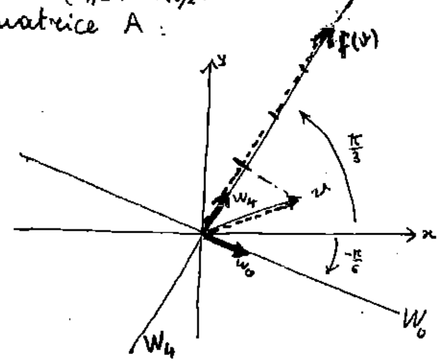
4) DATI IN $\mathbb{C}$: $z = -2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$; $w = 1+i\sqrt{3}$: scrivere z/w in forma algebrica $(a+bi)$ e in forma esponenziale $(\rho e^{i\theta}, \rho\ge 0, \theta\in\mathbb{R})$; poi rappresentare graficamente z, w, z/w.

$|z| = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$; $\arg z = \pi + \arctan(-1) = \frac{3}{4}\pi$;
$|w| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$; $\arg w = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.
$\frac{z}{w}$ = (in forma algebrica) $\frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i)(1-i\sqrt{3})}{4} =$
$= \frac{1}{4}\left(-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+i(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right)$
$\frac{z}{w}$ = (in forma esponenziale) $\frac{4e^{\frac{3}{4}\pi i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = 2e^{(\frac{3}{4}-\frac{1}{3})\pi i} = 2e^{\frac{5}{12}\pi i}$



5) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3\end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ composta da autovettori per A. Diagonalizzare A con una matrice di passaggio ortogonale, di determinante 1, cioè la matrice di una rotazione. Stabilire qual è l'angolo di rotazione; infine, descrivere geometricamente l'endomorfismo definito da A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$

$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2-4\lambda$; $\lambda^2-4\lambda=0$ se $\lambda = \begin{cases}0 \\ 4\end{cases}$
Autovettori: per $\lambda=0$: soluzioni di: $x+\sqrt{3}y=0$, cioè $(-\sqrt{3}y; y)$, $y\in\mathbb{R}$; base autospazio: $\{(-\sqrt{3}, 1)\}$, normalizzata: $\{(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})\}$.
Autovettori per $\lambda=4$: soluzioni di: $-3x+\sqrt{3}y=0$, cioè $(x, \sqrt{3}x)$, $x\in\mathbb{R}$; base normalizzata autospazio: $\{(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\}$. La matrice $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ che ha come colonne gli autovettori normalizzati diagonalizza A, cioè $P^T\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4\end{pmatrix}$. P è ortogonale e il suo determinante è 1; quindi P rappresenta una rotazione; cioè P è del tipo $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ cosicché $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{sen}\,\alpha = -\frac{1}{2}$ e allora $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. Le colonne di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori per A:
$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\right\}$. Infine: descrizione geometrica di f definito dalla matrice A:



Se $w_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2\end{pmatrix}$ (base di W_0) e $w_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ (base di W_4), ogni vettore $v\in\mathbb{R}^2$ è esprimibile come $\alpha w_0 + \beta w_4$, con $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$; allora $f(v) = \alpha f(w_0) + \beta f(w_4) = \alpha\cdot\mathbf{0} + \beta\cdot 4w_4$; quindi f proietta v sulla retta W_4, e dilata questa proiezione di un fattore 4