CH. IND. 17.02.2015

1) PROBLEMA DI CAUCHY: $\begin{cases} y' = -3\tan x \cdot y + 4\,\text{sen}\,x \\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

E.D. lineare di 1° ordine, $y' = a y + b$ con $\begin{cases} a(x) = -3\tan x, \\ b(x) = 4\,\text{sen}\,x \end{cases}$ $x \in I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 3\,\frac{-\text{sen}\,x}{\cos x}\,dx = 3\ln(\cos x)$.

Soluzioni equazione differenziale: $y(x) = e^{A(x)}\left(C + \int b(x)\, e^{-A(x)}\,dx\right)$,

$y(x) = e^{3\ln(\cos x)}\left(C + \int 4\,\text{sen}\,x \cdot e^{-3\ln(\cos x)}dx\right) = \cos^3 x\left(C + \int 4(\cos x)^{-3}\,\text{sen}\,x\,dx\right)$

$= \cos^3 x\left(C + \frac{2}{\cos^2 x}\right)$; $\quad y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(C+4)$, desiderato $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

Allora $C+4 = 2$, $C = -2$; la soluzione del problema di Cauchy è:

$y(x) = \cos^3 x\left(-2 + \frac{2}{\cos^2 x}\right) = 2\cos x - 2\cos^3 x$, $x \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

---

2) DETERMINARE E CLASSIFICARE I PUNTI CRITICI PER: $f(x,y) = 36x + 9x^2 - 2x^3 + 36xy - 54y^2$

$\begin{cases} f'_x = 36 + 18x - 6x^2 + 36y = 0 & (1) \\ f'_y = 36x - 108y = 0 & (2) \end{cases}$ $\quad (2) \rightarrow x = 3y$, ovvero $y = \frac{1}{3}x$

(1), con $y = \frac{1}{3}x$, dà: $36 + 18x - 6x^2 + 12x = 0$; $x^2 - 5x - 6 = 0$; $x = \begin{matrix} -1 \\ 6 \end{matrix}$

Se $x = -1$ allora (da (2)) $y = -\frac{1}{3}$; se $x = 6$ allora $y = 2$

Punti critici: $(-1, -\frac{1}{3})$; $(6; 2)$.

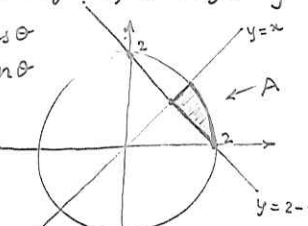
Matrice Hessiana di f: $H(x,y) = \begin{pmatrix} 18-12x & 36 \\ 36 & -108 \end{pmatrix}$

$H(-1, -\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 30 & 36 \\ 36 & -108 \end{pmatrix}$ che ha il det. < 0; quindi $(-1, -\frac{1}{3})$ è un PUNTO DI SELLA per f

$H(6,2) = \begin{pmatrix} -54 & 36 \\ 36 & -108 \end{pmatrix}$; qui $\det H > 0$ e $f''_{xx} < 0$, perciò $(6,2)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO per f.

---

3) CALCOLARE L'INTEGRALE: $\iint_A \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 4,\ 2-x \le y \le x\}$



Conviene applicare le coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

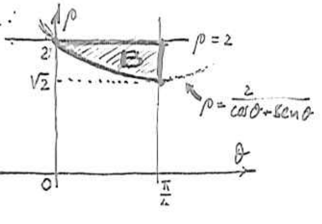
L'insieme $B = \{(\rho,\theta);\ \rho \in [0,+\infty[,\ \theta \in [0, 2\pi],\ (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) \in A\}$ è caratterizzato da:

$x^2+y^2 \le 4 \Rightarrow \rho^2 \le 4 \Rightarrow 0 \le \rho \le 2$ (poiché $\rho \ge 0$)

$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ (deducibile algebricamente, ma evidente dalla osservazione geometrica); infine da $2 - x \le y$ si ottiene:

$2 - \rho\cos\theta \le \rho\,\text{sen}\,\theta$; $\rho(\cos\theta + \text{sen}\,\theta) \ge 2$, e siccome $\cos\theta + \text{sen}\,\theta > 0$ per $\theta \in [0, \pi/4]$, segue $\rho \ge \frac{2}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}$. Dunque:

$B = \{(\rho,\theta);\ \theta \in [0, \frac{\pi}{4}];\ \rho \in [\frac{2}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}, 2]\}$



Allora: $\iint_A \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_B \frac{\rho(\cos\theta - \text{sen}\,\theta)}{\rho^2} \cdot \rho\,d\rho\,d\theta =$

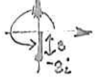
$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{\frac{2}{\cos\theta+\text{sen}\,\theta}}^{2} (\cos\theta - \text{sen}\,\theta)\,d\rho\right)d\theta = \int_0^{\pi/4}\left(2 - \frac{2}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}\right)\cdot(\cos\theta - \text{sen}\,\theta)\,d\theta =$

$= \int_0^{\pi/4}\left(2(\cos\theta - \text{sen}\,\theta) - 2\,\frac{\cos\theta - \text{sen}\,\theta}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}\right)d\theta = \Big[2\,\text{sen}\,\theta + 2\cos\theta - 2\ln(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} =$

$= \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\ln(\sqrt{2}) - 2 = 2\sqrt{2} - \ln 2 - 2$

---

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $z^3 = -8i$; soluzioni in forma algebrica e esponenziale, e rappresentazione grafica.



$|-8i| = 8$; un argomento di $-8i$ è: $\frac{3}{2}\pi$.

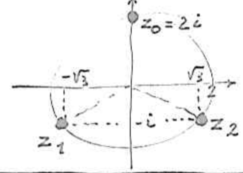
Quindi $-8i = 8e^{\frac{3\pi}{2}i}$ e allora le soluzioni di $z^3 = -8i$ sono:

$z = z_k = \underset{(\sqrt[3]{8})}{2} \cdot e^{(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3})i}$, $k = 0, 1, 2$; precisamente:

$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = +2i$

$z_1 = 2e^{\frac{7}{6}\pi i} = -\sqrt{3} - i$

$z_2 = 2e^{\frac{11}{6}\pi i} = \sqrt{3} - i$



---

5) DETERMINARE k PER IL QUALE LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & k \end{pmatrix}$ AMMETTE $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ COME AUTOVETTORE. CON TALE VALORE DI k, DETERMINARE GLI AUTOVALORI DI A E UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$ FORMATA DA AUTOVETTORI PER A.

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6+3k \end{pmatrix}$. Quest'ultimo vettore è proporzionale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ soltanto se è il vettore nullo, cioè $-6 + 3k = 0$, $\boxed{k = 2}$

Con $k = 2$ abbiamo $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$; calcoliamo gli autovalori.

$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -6 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$; autovalori: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$

Autovettori relativi a $\lambda = 0$: $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3x$;

gli autovettori sono $(x, 3x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$; base autospazio: $\{(1,3)\}$

Autovettori relativi a $\lambda = 5$: $(A - 5I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} -2x - y = 0 \\ -6x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2x$;

gli autovettori sono: $(x, -2x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$; base autospazio: $\{(1, -2)\}$

Una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori per A è $\mathcal{B} = \{(1,3); (1,-2)\}$

OSSERVAZIONE Il calcolo degli autovalori poteva essere semplificato notando che, con $k = 2$, $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; ciò mostra che $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 0. L'altro autovalore è allora 5, perché la somma degli autovalori è la TRACCIA di A, che in questo caso vale $3 + 2 = 5$.

Gli autovettori relativi a $\lambda = 5$ andavano invece calcolati nel modo su esposto, cioè non ci sono "scorciatoie"