CH. IND. 10.04.2015

1) PROBLEMA DI CAUCHY: ① $y'' + 2y' = 12xe^{-2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$

E.D. omogenea associata: ② $y'' + 2y' = 0$

Equazione caratteristica: ③ $\lambda^2 + 2\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

Soluzione generale di ②: $C_1 + C_2 e^{-2x}$

La funzione $f(x) = 12xe^{-x}$ è "del tipo ④" con $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}$

quindi c'è una soluzione di ① della forma:

⑤ $z(x) = x\cdot(ax+b)e^{-2x} = (ax^2+bx)e^{-2x}$. Le derivate di $z(x)$ sono:

$z'(x) = (2ax + b - 2ax^2 - 2bx)e^{-2x}$;

$z''(x) = (2a - 4ax - 2b - 4ax - 2b + 4ax^2 + 4bx)e^{-2x}$; e allora

$$\left.\begin{array}{l} z'' \\ +2z' \end{array}\right\} = e^{-2x}\left[\begin{array}{l} 4ax^2 + x(-8a+4b) + 2a - 4b \\ -4ax^2 + x(4a-4b) \qquad + 2b \end{array}\right]$$

$$= e^{-2x}\left[\qquad -4ax \qquad + 2a - 2b\right] \text{ desiderato} = 12xe^{-2x}$$

Segue $\begin{cases} -4a = 12 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -3 \end{cases}$ e $z(x) = (-3x^2 - 3x)e^{-2x}$

SOLUZIONE GENERALE DI ①: $y(x) = C_1 + (-3x^2 - 3x + C_2)e^{-2x}$; quindi

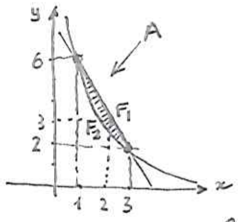
$y'(x) = (\cancel{-6x} - 3 + 6x^2 + \cancel{6x} - 2C_2)e^{-2x}$; allora:

$y(0) = \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -3 - 2C_2 = 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -4 \end{cases}$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: $y(x) = 4 + (-3x^2 - 3x - 4)e^{-2x}$, $x \in]-\infty, +\infty[$

---

2) MINIMO, MASSIMO DI $f(x,y) = y - \frac{8}{x}$ in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x>0,\ xy \geq 6,\ 2x+y-8 \leq 0\}$



Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ non è mai $= 0$, non ci sono punti critici per f. Il minimo e il massimo in A sono valori assunti sulla frontiera. Questa è formata da

$F_1 = \{(x,y);\ y = 8 - 2x,\ x \in [1,3]\}$,

$F_2 = \{(x,y);\ xy = 6,\ x \in [1,3]\}$.

SE $(x,y) \in F_1$ allora $f(x) = 8 - 2x - \frac{8}{x} \equiv g_1(x)$, $x \in [1,3]$

$g_1'(x) = -2 + \frac{8}{x^2} = \frac{-2x^2+8}{x^2}$; $g_1'(x) = 0$ se $x = \pm 2$; $2 \in [1,3]$.

SE $(x,y) \in F_2$ allora $x = \frac{6}{y}$ e $f(x,y) = y - \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3}y \equiv g_2(y)$ $(y \in [2,6])$.

$g_2'(y) = -\frac{1}{3}$ non è mai $= 0$, e ovviamente $\begin{cases} g_2(2) = -\frac{2}{3} = g_1(3) \\ g_2(6) = -2 = g_1(1) \end{cases}$.

$\boxed{\begin{array}{l} g_1(1) = -2 \\ g_1(3) = -\frac{2}{3} \\ g_1(2) = 0 \end{array}}$

Quindi il minimo e il massimo valore di $f(x,y)$ in A sono rispettivamente $-2 = g_1(1) = f(1,6)$ e $0 = g_1(2) = f(2,3)$.

---

3) $I = \iint_A xy^3\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x>0,\ xy \geq 6,\ 2x+y-8 \leq 0\}$ (v. es. 2)

$$I = \int_2^6 \left(\int_{6/y}^{4-\frac{y}{2}} xy^3\,dx\right)dy = \int_2^6 \frac{1}{2}\left[x^2y^3\right]_{x=\frac{6}{y}}^{x=4-\frac{y}{2}} dy = \frac{1}{2}\int_2^6 \left(\left(4-\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{36}{y^2}\right)\cdot y^3\,dy =$$

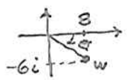
$$= \frac{1}{2}\int_2^6 \left(16y^3 + \frac{1}{4}y^5 - 4y^4 - 36y\right)dy = \left[2y^4 + \frac{1}{48}y^6 - \frac{2}{5}y^5 - 9y^2\right]_{y=2}^{y=6} = \frac{2176}{15}$$

---

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $(1-2i)z^2 = -4-22i$ $(*)$

$(*) \iff z^2 = \frac{-4-22i}{1-2i} = \frac{(-4-22i)(1+2i)}{5} = \frac{1}{5}(40-30i) = 8-6i \equiv w$

$|w| = \sqrt{64+36} = 10$; $\theta = \arg w \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, e ha:



$\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$.

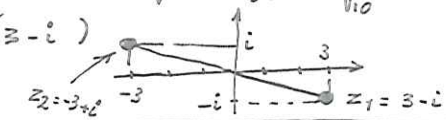
Le soluzioni di $z^2 = w$ sono: $z = \pm\sqrt{10}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

Ricordiamo che $\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}$; $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}$;

quindi nel nostro caso, nel quale $\theta/2 \in]-\frac{\pi}{4}, 0[$,

$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ e allora:

$z = \pm\sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}i\right) = \pm(3-i)$



---

5) DETERMINARE k, ℓ AFFINCHÈ $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ \ell & 4 \end{pmatrix}$ ABBIA AUTOVETTORI ORTOGONALI, E UN AUTOVETTORE SIA $u = \binom{2}{1}$. PER TALI k, ℓ CALCOLARE GLI AUTOVALORI DI A E UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^2$ FORMATA DA AUTOVETTORI PER A

Per avere autovettori ortogonali, A deve essere simmetrica; quindi $\underline{\ell = k}$, ossia $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}$. Allora: $A\cdot\binom{2}{1} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}\cdot\binom{2}{1} = \binom{2+k}{2k+4}$.

Desideriamo $\binom{2+k}{2k+4}$ proporzionale a $\binom{2}{1}$, quindi $\det\begin{pmatrix} 2+k & 2 \\ 2k+4 & 1 \end{pmatrix} = 0$,

cioè: $2+k-4k-8 = 0$, $-3k-6 = 0$, $\underline{k = -2}$. Allora $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}$

Non è necessario calcolare il polinomio caratteristico di A per trovare autovalori e (poi) autovettori. Un autovettore è, per costruzione, $u = \binom{2}{1}$; essendo $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\binom{2}{1} = \binom{0}{0}$, il corrispondente autovalore è $\lambda = 0$.

Un altro autovettore linearmente indipendente da u è ortogonale a u, per esempio $v = \binom{1}{-2}$; il corrispondente autovalore è certamente $\mu = 5$, perché la somma degli autovalori è uguale a TRACCIA di A $= 1+4 = 5$

Una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori per A è $\mathcal{B} = \left\{\frac{u}{\|u\|};\ \frac{v}{\|v\|}\right\} = \left\{\binom{2/\sqrt{5}}{1/\sqrt{5}};\ \binom{1/\sqrt{5}}{-2/\sqrt{5}}\right\}$

(il procedimento "classico": polinomio caratteristico, calcolo autovalori e successivo calcolo autovettori conduce, ovviamente agli stessi risultati, in modo un po' più laborioso)