1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{-1}{(2y+1)(x-2)}$; $y(1) = -2$

(E.D. a variabili separabili " $y' = f(x)\cdot g(y)$ ")

$f(x) = \frac{1}{x-2}$, $x \in I =]-\infty, 2[$; $g(y) = \frac{-1}{2y+1}$, $y \in J =]-\infty, -\frac{1}{2}[$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(2y+1)(x-2)}$; $\int (-2y-1)\,dy = \int \frac{1}{x-2}\,dx$; $-y^2 - y = \ln(2-x) + C$ *

[notare che $\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2| = \ln(2-x)$ perché $x \in]-\infty, 2[$)

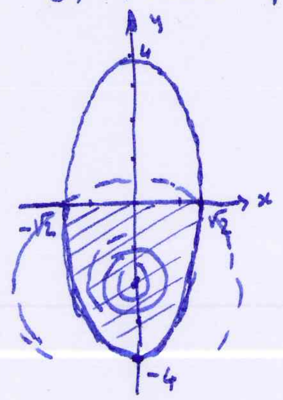
$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = -2 \end{matrix}\right\}$ in * $\Rightarrow$ $-4+2 = \ln 1 + C$ $\Rightarrow$ $C = -2$; quindi: $-y^2 - y = \ln(2-x) - 2$;

$y^2 + y + \ln(2-x) - 2 = 0$; $y = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{9 - 4\ln(2-x)}\right)$

La scelta tra + e − in ⊙ avviene facendo in modo che si abbia $y(1) = -2$; ciò risulta scegliendo il segno −. L'espressione della soluzione del problema di Cauchy è: $y(x) = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{9 - 4\ln(2-x)}\right)$.

DOMINIO DELLA SOLUZIONE: oltre a $x < 2$, deve essere $9 - 4\ln(2-x) > 0$; $\ln(2-x) < \frac{9}{4}$; $2 - x < e^{9/4}$, $x > 2 - e^{9/4}$. Il dominio è l'intervallo $]2 - e^{9/4}; 2[$.

2) MINIMO, MASSIMO DI $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4y$ in $A = \{(x,y);\ 8x^2 + y^2 \le 16;\ y \le 0\}$



PRIMO METODO. I) P. critici per f: $\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = 2y + 4 = 0 \end{cases} \to (x,y) = (0,-2) \in A$

II) FRONTIERA DI A $= F_1 \cup F_2$;

$F_1 = \{(x,y);\ y = 0,\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\}$;

$F_2 = \{(x,y);\ 8x^2 + y^2 = 16;\ y \le 0\}$

SE $(x,y) \in F_1$ allora $y = 0$ e $f(x,y) = x^2$, $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; $= g_1(x)$

$g_1(\pm\sqrt{2}) = 2$; $g_1'(x) = 2x$, $2x = 0$ se $x = 0$, $g_1(0) = 0$

$f(0,-2) = -4$
$g_1(\pm\sqrt{2}) = 2$
$g_1(0) = 0$

SE $(x,y) \in F_2$ allora $x^2 = 2 - \frac{1}{8}y^2$, e $f(x,y) = 2 - \frac{1}{8}y^2 + y^2 + 4y = 2 + \frac{7}{8}y^2 + 4y = g_2(y)$, $y \in [-4, 0]$.

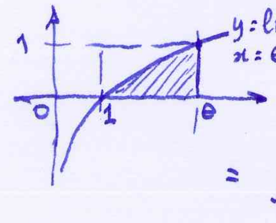
$g_2(-4) = 0$; $g_2(0) = 2$; $g_2'(y) = \frac{7}{4}y + 4$, $g_2'(y) = 0$ se $y = -\frac{16}{7}$

$g_2\left(-\frac{16}{7}\right) = -\frac{18}{7}$. Tra i valori calcolati, il minimo è -4, il massimo è 2.

SECONDO METODO. Le linee di livello di f sono $L_k = \{(x,y);\ x^2 + y^2 + 4y = k\}$, circonferenze con centro $(0,-2)$ e raggio $= \sqrt{4+k}$ $(k \ge -4)$. Il minimo k per cui L_k interseca A è $k = -4$ (L_k circonferenza degenere). Il massimo k per cui L_k interseca A è quello per cui L_k passa per $(\pm\sqrt{2}, 0)$, che sono i punti di A alla massima distanza da $(0,-2)$. L_k passa per $(\pm\sqrt{2}, 0)$ se $k = 2$. Quindi −4 e 2 sono il minimo e il massimo valore che $f(x,y)$ assume in A.

CH.IND. 08.06.2015

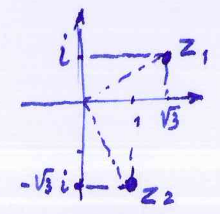
3) INTEGRALE DOPPIO: $\iint_A \frac{e^{2y-y^2}}{x}\,dx\,dy$; $A = \{(x,y),\ 1 \le x \le e;\ 0 \le y \le \ln x\}$



$\iint_A \frac{e^{2y-y^2}}{x}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{e^y}^{e} \frac{e^{2y-y^2}}{x}\,dx \right) dy = \int_0^1 e^{2y-y^2} \left[\ln x\right]_{x=e^y}^{x=e} dy =$

$= \int_0^1 e^{2y-y^2}(1-y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2y-y^2} \underbrace{(2-2y)}_{\text{derivata di } e^{2y-y^2}} dy = \frac{1}{2}\left[e^{2y-y^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}(e-1)$

4) RAPPRESENTARE NEL PIANO COMPLESSO: $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. CALCOLARE MODULO E UN ARGOMENTO DI $z = \frac{z_1^6}{z_2} = \frac{(\sqrt{3}+i)^6}{1 - i\sqrt{3}}$.



$|z_1| = |z_2| = 2$; se θ_1, θ_2 sono i rispettivi argomenti, allora $\tan\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; un valore per θ_1 è $\frac{\pi}{6}$; $\tan\theta_2 = -\sqrt{3}$, un valore per θ_2 è $-\frac{\pi}{3}$. Allora

$z = \frac{(2e^{i\pi/6})^6}{2e^{-i\pi/3}} = \frac{2^6 \cdot e^{i\pi}}{2e^{-i\pi/3}} = 32e^{\frac{4}{3}\pi i} = -16(+1+\sqrt{3}\,i)$

L'espressione $z = 32e^{\frac{4}{3}\pi i}$ mostra $|z| = 32$, $\arg z = \frac{4}{3}\pi$.

5) DIRE SE $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ E' DIAGONALIZZABILE SU ℝ O SU ℂ; IN CASO AFFERMATIVO CALCOLARNE UNA DIAGONALIZZAZIONE Λ E UNA MATRICE S DI CAMBIAMENTO DI BASE TALE CHE $\Lambda = SAS^{-1}$

Autovalori per A: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$ che non ha radici reali, quindi A non è diagonalizzabile su ℝ. Le radici di $p(\lambda)$ sono: $\lambda = \pm i$; quindi A è diagonalizzabile su ℂ.

AUTOVETTORI corrispondenti a $\lambda = i$: soluzioni di $\begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \end{cases}$, cioè (x, ix), $\forall x \in \mathbb{C}$; una base per l'autospazio è $\{(1; i)\}$.

Siccome A è a valori reali gli autovettori corrispondenti a $\lambda = -i$ sono coniugati di quelli relativi a $\lambda = i$; una base dell'autospazio relativo a $\lambda = -i$ è $\{(1, -i)\}$.

La matrice A è simile (su ℂ) a $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \Lambda$; $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ (le colonne di S^{-1} sono autovettori corrispondenti nell'ordine, a $\lambda = i$, $\lambda = -i$). S è l'inversa di S^{-1}. $\det(S^{-1}) = -2i$;

quindi $S = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

VERIFICA (non necessaria) $S \cdot A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$;

$SAS^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$