1) PROBLEMA DI CAUCHY: ① $3y''+y' = 8+10e^{-2x}$; $y(0)=5$; $y'(0)=10$

E.D. omogenea associata a ①: ② $3y''+y'=0$

Eq. caratteristica di ②: ③ $3\lambda^2+\lambda=0 \to \lambda = \left\langle \begin{matrix}0\\ -\frac{1}{3}\end{matrix}\right.$

Soluzione generale di ②: $\boxed{C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}}$

Ricerca di una soluzione di ①' $3y''+y'=8$: $f_1(x)=8$ ha

m	α	β	k
0	0	0	1*

quindi c'è una soluzione $z(x)$ di ①' della forma: $z(x)=A\cdot x$

da cui $z'(x)=A$, $z''(x)=0$ e : $3z''+z' = A$, desiderato $=8$.

Quindi $z(x) = 8x$.

Ricerca di una soluzione di ①'': $3y''+y'=10e^{-2x}$; $f_2(x)=10e^{-2x}$ ha

m	α	β	k
0	-2	0	0

quindi c'è una soluzione $w(x)$ di ①'' della forma: $w(x)=A\cdot e^{-2x}$, da cui

$w'(x) = -2Ae^{-2x}$, $w''(x)=4Ae^{-2x}$; $3w''+w' = 12Ae^{-2x}-2Ae^{-2x} = 10Ae^{-2x}$

desiderato $=10e^{-2x}$; quindi $A=1$ e $w(x) = e^{-2x}$.

SOLUZIONE GENERALE DI ①: $y(x) = 8x+e^{-2x}+C_1+C_2e^{-\frac{1}{3}x}$

da cui $y'(x) = 8-2e^{-2x}-\frac{1}{3}C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$.

$$\begin{matrix} y(0)= \\ y'(0)= \end{matrix}\begin{cases} 1+C_1+C_2 = 5 & \to C_1 = 4-C_2 \to C_1 = 4+12 = 16 \\ 8-\frac{1}{3}C_2-2 = 10 & \to -\frac{1}{3}C_2 = 4 \to C_2 = -12 \end{cases}$$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: $y(x) = 8x+e^{-2x}+16-12e^{-\frac{1}{3}x}$, $x\in\,]-\infty,+\infty[$

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$ $\quad ((x,y)\neq(0,0))$

$$\begin{matrix} f'_x = \\ f'_y = \end{matrix}\begin{cases} \ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 & \text{(I)} \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = 0 & \text{(II)} \to x=0 \vee y=0 \end{cases}$$

SE $x=0$ (I) $\to \ln(y^2)=0 \to y^2=1 \to y=\pm1$; P.C. $(0,\pm1)$

SE $y=0$ (I) $\to \ln(x^2)+2=0 \to x^2 = e^{-2} \to x = \pm e^{-1}$; P.C. $(\pm e^{-1},0)$

DERIVATE SECONDE: $f''_{xx} = \dfrac{2x}{x^2+y^2} + \dfrac{4x(x^2+y^2)-4x^3}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}+\dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$;

$f''_{xy}=f''_{yx} = \dfrac{2\cancel{x}y(x^2+y^2)-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$; $f''_{yy} = \dfrac{2x(x^2+y^2)-4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

MATRICE HESSIANA: $H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{2x}{x^2+y^2} & ; & \dfrac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} & ; & \dfrac{2x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$

$H(0,1) = \begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$; $H(0,-1) = \begin{pmatrix}0&-2\\-2&0\end{pmatrix}$ hanno determinante $<0 \Rightarrow (0,\pm1)$ PUNTI DI SELLA

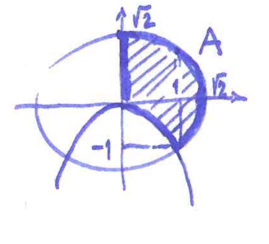
$H(e^{-1},0) = \begin{pmatrix}2e&0\\0&2e\end{pmatrix}$; $H(-e^{-1},0) = \begin{pmatrix}-2e&0\\0&-2e\end{pmatrix}$: $(e^{-1},0)$ è punto di MINIMO RELATIVO per f,

$(-e^{-1},0)$ è PUNTO DI MASSIMO RELATIVO per f

* $k=1$ perché $\alpha+\beta i = 0$ è soluzione semplice di ③

C.H. IND. 08.07.2015

3) $\iint_A y\,dx\,dy$; $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 2,\ x^2+y\ge0,\ x\ge0\}$



Sia $A_1 = A\cap\{(x,y);\ x\le1\}$, $A_2 = A\cap\{(x,y);\ x\ge1\}$;

con $\iint_A y\,dx\,dy = \iint_{A_1} y\,dx\,dy + \iint_{A_2} y\,dx\,dy$.

(I) $\iint_{A_1} y\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{-x^2}^{\sqrt{2-x^2}} y\,dy\right)dx = \int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=-x^2}^{y=\sqrt{2-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1(2-x^2-x^4)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left[2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{11}{15}$

(II) $\iint_{A_2} y\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt2}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} y\,dy\right)dx = \int_1^{\sqrt2}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{y=\sqrt{2-x^2}}dx = \int_1^{\sqrt2} 0\,dx = 0$

Pertanto $\iint_A y\,dx\,dy = 0+\frac{11}{15} = \frac{11}{15}$.

4) MODULO, ARGOMENTO DI $z=(\sqrt3-i)^2\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$; SCRIVERE z^{-1} IN FORMA ESPON. $(z^{-1}=\rho e^{i\theta})$

$|\sqrt3-i| = \sqrt{3+1} = 2$; $|(\sqrt3-i)^2| = 4$; $\arg(\sqrt3-i) = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

$\arg((\sqrt3-i)^2) = 2\arg(\sqrt3-i) = -\frac{\pi}{3}$.

$|e^{\frac{\pi}{4}i}|=1$; $\arg(e^{\frac{\pi}{4}i}) = \frac{\pi}{4}$. Perciò $|z|=4$, $\arg z = -\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$;

quindi $z = 4e^{-\frac{\pi}{12}i}$ e allora $z^{-1} = \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{12}i}$

5) $B = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$. Calcolare gli autospazi di $A=B^3$ e dire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$. Dire se A è invertibile e in caso affermativo calcolare A^{-1}.

$B^2 = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$; $B^3 = \begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix} = A$

Poiché A è triangolare superiore, gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale: $\lambda=1$, autovalore doppio. La dimensione del corrispondente autospazio è $d = 2-\text{rango}(A-1\cdot I) =$
$= 2-\text{rango}\begin{pmatrix}0&-3\\0&0\end{pmatrix} = 2-1 = 1$; siccome questa dimensione è minore della molteplicità algebrica dell'autovalore, A NON è diagonalizzabile, né su $\mathbb{R}$, né su $\mathbb{C}$.

A è invertibile, essendo $\det A = 1\neq0$; l'inversa di A è

$A^{-1} = \begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$ (verifica: $A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$).