1) PROBLETA DI CAUCHY: $y' = \frac{xy^3}{x^2-1}$; $y(2) = 1$

E' una E.D. a variabili separabili, $y' = f(x)\cdot g(y)$ con:

$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $x \in I =]1, +\infty[$ (I deve contenere $x_0 = 2$)

$g(y) = y^3$, $y \in J =]0, +\infty[$ (J deve contenere $y_0 = 1$, e $g(y) \neq 0$ in J)

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{x^2-1} \rightarrow \int y^{-3}\,dy = \int \frac{x}{x^2-1}\,dx \rightarrow -\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + C$ (*)

$\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ in (*) $\rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3 + C \rightarrow C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 3$, e (*) diventa:

$-\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 3$ da cui:

$\frac{1}{y^2} = -\ln(x^2-1) + 1 + \ln 3$; $y = \frac{1}{\sqrt{1+\ln 3 - \ln(x^2-1)}}$,

tenendo presente che $y(x)$ deve assumere valori >0 ($\in J$)

DOMINIO DELLA SOLUZIONE: oltre a $x>1$ deve essere

$1 + \ln 3 - \ln(x^2-1) > 0$; $\ln(x^2-1) < 1 + \ln 3$; $x^2 - 1 < 3e$;

$x^2 < 1 + 3e$; $|x| < \sqrt{1+3e}$.

Perciò il dominio della soluzione e' l'intervallo $]1, \sqrt{1+3e}[$

---

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = 5\ln(1+x^2+y^2) - 3x$

$f'_x = \frac{10x}{1+x^2+y^2} - 3 = 0$; $f'_y = \frac{10y}{1+x^2+y^2} = 0 \rightarrow y = 0$

$\left\{\begin{matrix} \frac{10x}{1+x^2} - 3 = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right.$ ⊠

⊠ $\rightarrow 10x - 3 - 3x^2 = 0$, $3x^2 - 10x + 3 = 0$, $x = \frac{5 \pm 4}{3} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow \frac{1}{3} \end{matrix}$

Ci sono due punti critici per f: $(\frac{1}{3}, 0)$ e $(3, 0)$

Calcoliamo le derivate seconde per comporre la matrice Hessiana:

$f''_{xx} = \frac{10(1+x^2+y^2) - 20x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{10(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$; $f''_{yy} = \frac{10(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$;

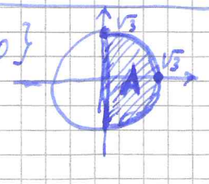
$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{-20xy}{(1+x^2+y^2)^2}$; quindi $H(x,y) = \frac{10}{(1+x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} 1-x^2+y^2 & ; -20xy \\ -2xy & ; 1+x^2-y^2 \end{pmatrix}$

e quindi $H(\frac{1}{3}, 0) = \frac{81}{10}\begin{pmatrix} 8/9 & 0 \\ 0 & 10/9 \end{pmatrix}$ definita positiva $\Rightarrow (\frac{1}{3}, 0)$ p. di MINIMO RELATIVO

$H(3,0) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ NON DEFINITA $\Rightarrow (3,0)$ p. di SELLA.

---

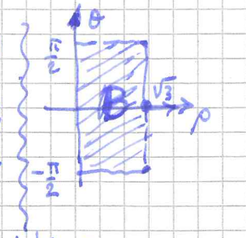
3) $\iint_A x\ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 3,\ x \geq 0\}$



Usiamo le coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

Allora $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B \rho\cos\theta\cdot\ln(1+\rho^2)\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$ ⊠

con $B = \{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3};\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$



⊠ $= \int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2\ln(1+\rho^2)\cos\theta\,d\theta\right)d\rho = \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2\ln(1+\rho^2)\,[\mathrm{sen}\,\theta]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}\,d\rho$

$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \rho^2\ln(1+\rho^2)\,d\rho$ (*) Per il calcolo di una primitiva integriamo per parti:

$\int \rho^2\ln(1+\rho^2)\,d\rho = \frac{1}{3}\rho^3\ln(1+\rho^2) - \int \frac{1}{3}\rho^3\cdot\frac{2\rho}{1+\rho^2}\,d\rho = \frac{1}{3}\rho^3\ln(1+\rho^2) -$

$-\frac{2}{3}\int(\rho^2 - 1 + \frac{1}{\rho^2+1})\,d\rho = \frac{1}{3}\rho^3\ln(1+\rho^2) - \frac{2}{9}\rho^3 + \frac{2}{3}\rho - \frac{2}{3}\arctan\rho \equiv P(\rho)$; e allora:

(*) $= 2(P(\sqrt{3}) - P(0)) = 2(\sqrt{3}\ln 4 - \frac{2}{9}\pi)$

DIVISIONE:

$\begin{array}{r|l} \rho^4 & \rho^2+1 \\ -\rho^4-\rho^2 & \hline \rho^2-1 \quad Q \\ -\rho^2 & \\ -\rho^2+1 & \\ \hline 1 \quad R \end{array}$

---

4) MODULO, ARGOMENTO DI $z = \frac{e^{(\pi/4)i}}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2}$; SCRIVERE z^{-1} IN FORMA ESPONENZIALE

$\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, quindi $z = \frac{e^{i\pi/4}}{4e^{i\pi/2}} =$

$= \frac{1}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ cosicche' $|z| = \frac{1}{4}$, $\arg z = -\frac{\pi}{4}$ e

$z^{-1} = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$, che appare già in forma esponenziale

---

5) TROVARE k, ℓ TALI CHE $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ E' AUTOVETTORE PER $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & \ell & 1 \end{pmatrix}$.

CON TALI k, ℓ, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A.

$A\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ \ell \end{pmatrix}$ che si desidera multiplo di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quindi $k = \ell = 0$;

in tale modo $A\cdot x = 2x$, e' autovettore per A con autovalore 2.

Con $k = \ell = 0$, $\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 9(2-\lambda) =$

$= (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 9) = (2-\lambda)(-2-\lambda)(4-\lambda)$: autovalori $2, -2, 4$.

Base autospazio relativo a $\lambda = 2$: $\{(0,1,0)\}$ (già nota)

Autovettori associati a $\lambda = -2$: $(A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x \\ z = -x \end{cases}$

Base autospazio: $\{(4, -1, -4)\}$

Autovettori associati a $\lambda = 4$: $(A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} -3x + 3z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ z = x \end{cases}$

Base autospazio: $\{(2, 1, 2)\}$

Una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A e':

$B = \{(0,1,0);\ (4,-1,-4),\ (2,1,2)\}$

CT. IND. 10.09.2015