1) $y'' + 3y' = 12e^x + 18x + 21$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

E.D. omogenea associata: ② $y'' + 3y' = 0$; eq. caratteristica: ③ $\lambda^2 + 3\lambda = 0 \to \lambda = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$

Soluzioni di ②: $\boxed{C_1 + C_2 e^{-3x}}$. Cerchiamo $z(x)$ soluzione di: $z'' + 3z' = 12e^x$. $f_1(x) = 12e^x$ è "del tipo ④" con $\frac{m|\alpha|\beta|k}{0|1|0|0}$ quindi $z(x) = Ae^x$; $z' = z'' = Ae^x$ e: $z'' + 3z' = 4Ae^x$, desiderato $= 12e^x$; quindi $4A = 12$; $A = 3$; $\boxed{z(x) = 3e^x}$

Cerchiamo $w(x)$ soluzione di: $w'' + 3w' = 18x + 21$. $f_2(x) = 18x + 21$ è "del tipo ④" con $\frac{m|\alpha|\beta|k}{1|0|0|1}$ ($k=1$ perché $0+0i = 0$ è soluzione semplice di ③)

Allora $w(x) = x\cdot(ax+b) = ax^2 + bx$; $w' = 2ax + b$, $w'' = 2a$, e allora $w'' + 3w' = 6ax + 2a + 3b$, desiderato $= 18x + 21$; quindi $\begin{cases} 6a = 18 \\ 2a + 3b = 21 \end{cases} \to \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$ e: $\boxed{w(x) = 3x^2 + 5x}$. La soluzione generale di ① è: $y(x) = 3e^x + 3x^2 + 5x + C_1 + C_2 e^{-3x}$;

quindi $y'(x) = 3e^x + 6x + 5 - 3C_2 e^{-3x}$. Allora $y(0) = 3 + C_1 + C_2$, $y'(0) = 8 - 3C_2$

$\begin{cases} 3 + C_1 + C_2 = 1 \\ 8 - 3C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -3 \\ C_2 = 1 \end{cases}$. SOLUZIONE PR. DI CAUCHY: $\boxed{y(x) = 3e^x + 3x^2 + 5x - 3 + e^{-3x}}$ $x \in]-\infty, +\infty[$

---

2) DETERMINARE E CLASSIFICARE I PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = (x^2 - y^2)\ln x$

$f'_x = 2x\ln x + \frac{x^2 - y^2}{x} = \begin{cases} 2x\ln x + x - \frac{y^2}{x} = 0 & ① \\ \ldots - 2y\ln x = 0 & ② \to y = 0 \lor x = 1 \end{cases}$

$f'_y = \ldots\ldots$

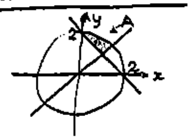
SE $y = 0$, ① $\to x(2\ln x + 1) = 0 \to x = e^{-1/2}$ ($x = 0$ non è accettabile) $\to P = (e^{-\frac12}, 0)$

SE $x = 1$, ① $\to 1 - y^2 = 0 \to y = \pm 1 \to$ altri due punti critici $Q = (+1, 1)$, $R = (1, -1)$.

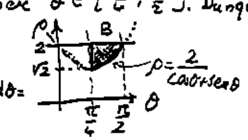
MATRICE HESSIANA: $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2\ln x + 3 + \frac{y^2}{x^2} & -2\frac{y}{x} \\ -2\frac{y}{x} & -2\ln x \end{pmatrix}$. $H(e^{-\frac12}, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (definita positiva), quindi $P = (e^{-\frac12}, 0)$ è punto di MINIMO RELATIVO per f; $H(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $H(1,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; in entrambi i casi $\det H < 0$, quindi $(1,1)$ e $(1,-1)$ sono PUNTI DI SELLA.

---

3) $* \iint_A \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,dx\,dy$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge x;\ x + y \ge 2\}$



Applichiamo il cambiamento di variabili: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$. L'insieme B dei (ρ, θ) tali che $(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) \in A$ è caratterizzato da: $\rho^2 \le 4$, quindi $(0 \le)\ \rho \le 2$; $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, e, da $x + y \ge 2$: $\rho(\cos\theta + \text{sen}\,\theta) \ge 2$ quindi $\rho \ge \frac{2}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}$, tenendo presente che $\cos\theta + \text{sen}\,\theta > 0$ per $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Dunque: $B = \{(\rho, \theta);\ \theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$; $\rho \in [\frac{2}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}, 2]\}$. Allora



$$* = \iint_B \frac{\rho^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}{\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_{\frac{2}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}}^{2} \rho(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)\,d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac12 \left[\rho^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)\right]_{\rho = \frac{2}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}}^{\rho = 2} = \frac12 \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(-4\frac{\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}{(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)^2} + 4(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)\right)d\theta =$$

$$= \frac12 \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(-4\frac{\cos\theta - \text{sen}\,\theta}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta} + 4\cos(2\theta)\right)d\theta = \left[\text{sen}(2\theta) - 2\ln(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\right]_{\theta = \frac{\pi}{4}}^{\theta = \frac{\pi}{2}} = -1 + \ln 2$$

---

4) Sia $z = \frac{(1 + i\sqrt3)^7}{\sqrt3 + i}$. Calcolare $|z|$, $\text{Re}\,z$, $\text{Im}\,z$, e un argomento di z

$1 + i\sqrt3 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ quindi $(1 + i\sqrt3)^7 = 2^7 \cdot e^{\frac73\pi i} = 2^7 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$; $\sqrt3 + i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$, quindi $\frac{(1 + i\sqrt3)^7}{\sqrt3 + i} = 2^6 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i - \frac{\pi}{6}i} = 64e^{\frac{\pi}{6}i} = 64(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}) = 32\sqrt3 + 32i$. Pertanto:

$|z| = 64$; $\text{Re}\,z = 32\sqrt3$, $\text{Im}\,z = 32$; un argomento di z è $\theta = \frac{\pi}{6}$.

---

5) DIAGONALIZZARE $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & \sqrt3 \\ 0 & \sqrt3 & 9 \end{pmatrix}$ con una matrice di passaggio M ortogonale di determinante 1, cioè la matrice di una rotazione. Scrivere gli → autovalori non reali di M in forma esponenziale.

Il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & \sqrt3 \\ 0 & \sqrt3 & 9-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 16\lambda + 60)$ che ha come radici 2, 6, 10 (autovalori di A)

AUTOSPAZIO PER $\lambda = 2$: $\begin{cases} 5y + \sqrt3 z = 0 \\ \sqrt3 y + 7z = 0 \end{cases} \to y = z = 0 \to \text{Eig}(A, 2) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

AUTOSPAZIO PER $\lambda = 6$: $\begin{cases} -4x = 0 \\ y + \sqrt3 z = 0 \\ \sqrt3 y + 3z = 0 \end{cases} \to x = 0, y = -\sqrt3 z \to \text{Eig}(A, 6) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\ +\sqrt3/2 \\ -1/2\end{pmatrix}\right)$

AUTOSPAZIO PER $\lambda = 10$: $\begin{cases} -8x = 0 \\ -3y + \sqrt3 z = 0 \\ \sqrt3 y - z = 0 \end{cases} \to x = 0, z = \sqrt3 y \to \text{Eig}(A, 10) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\ 1/2 \\ \sqrt3/2\end{pmatrix}\right)$

I vettori assunti per base degli autospazi sono già normalizzati, cioè hanno norma 1. Una matrice che diagonalizza A è: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt3/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt3/2 \end{pmatrix}$ la quale ha determinante 1, come richiesto.

(se avesse avuto determinante -1, avremmo potuto moltiplicare una sola delle ultime due colonne per -1). M diagonalizza A, cioè si ha che $M^T \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di M è:

$q(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt3}{2}-\lambda & \frac12 \\ 0 & -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \sqrt3\lambda + 1)$ le cui radici sono: 1 e $\frac{\sqrt3}{2} \pm \frac12 i$

Le ultime due (complesse) si possono scrivere in forma esponenziale così: $\frac{\sqrt3}{2} + \frac12 i = e^{\frac{\pi}{6}i}$; $\frac{\sqrt3}{2} - \frac12 i = e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

VARIANTE DI 1): ① $y'' + 4y = 10e^x + 8x + 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

E.D. omogenea associata ② $y'' + 4y = 0$; eq. caratteristica ③ $\lambda^2 + 4 = 0$ da cui $\lambda = \pm 2i$

SOLUZIONI DI ②: $\boxed{C_1\cos(2x) + C_2\,\text{sen}(2x)}$. Cerchiamo $z(x)$ soluzione di: $z'' + 4z = 10e^x$

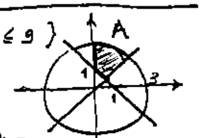
$f_1(x) = 10e^x$ è "del tipo ④" con $\frac{m|\alpha|\beta|k}{0|1|0|0}$, quindi $z(x) = Ae^x$, $z' = z'' = Ae^x$ e si ha $z'' + 4z = 5Ae^x$, desiderato $= 10e^x$, quindi $A = 2$ e $\boxed{z(x) = 2e^x}$

Ora cerchiamo $w(x)$ soluzione di $w'' + 4w = 8x + 8$; $f_2(x) = 8x + 8$ è "del tipo ④" con $\frac{m|\alpha|\beta|k}{1|0|0|0}$ quindi $w(x) = ax + b$, $w' = a$, $w'' = 0$; $w'' + 4w = 4ax + 4b$, desiderato $= 8x + 8$, quindi $a = b = 2$ e $\boxed{w(x) = 2x + 2}$. La soluzione generale di ① è: $y(x) = 2e^x + 2x + 2 + C_1\cos(2x) + C_2\,\text{sen}(2x)$; $y'(x) = 2e^x + 2 - 2C_1\,\text{sen}(2x) + 2C_2\cos(2x)$

$y(0) = 4 + C_1$; $y'(0) = 4 + 2C_2$. Si vuole: $\begin{cases} 4 + C_1 = 1 \\ 4 + 2C_2 = 5 \end{cases}$ quindi $\begin{cases} C_1 = -3 \\ C_2 = \frac12 \end{cases}$.

La soluzione del problema di Cauchy è: $\boxed{y(x) = 2e^x + 2x + 2 - 3\cos(2x) + \frac12\,\text{sen}(2x),\ x \in]-\infty, +\infty[}$

VARIANTE DI 3): $* \iint_A \frac{x - y}{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le y,\ x + y \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 9\}$



$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$, $(\rho, \theta) \in B$; $B = \{(\rho, \theta);\ \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$; $\rho \in [\frac{1}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}, 3]\}$

$$* = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_{\frac{1}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}}^{3} \frac{\rho(\cos\theta - \text{sen}\,\theta)}{\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[(\cos\theta - \text{sen}\,\theta)\cdot\rho\right]_{\rho = \frac{1}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}}^{\rho = 3} d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos\theta - 3\,\text{sen}\,\theta - \frac{\cos\theta - \text{sen}\,\theta}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}\right)d\theta = \left[3\,\text{sen}\,\theta + 3\cos\theta - \ln(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\right]_{\theta = \frac{\pi}{4}}^{\theta = \frac{\pi}{2}} =$$

$$= 3 - 3\sqrt2 + \frac12\ln 2$$