1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{y^2-4}{2xy}$; $y(e) = 1$

E' una E.D. a variabili separabili, $y' = f(x)\cdot g(y)$ con:
$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \,]0,+\infty[\, = I$; $g(y) = \frac{y^2-4}{2y}$, $y \in \,]0,2[\, = J$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{y^2-4}{2y}$; $\int \frac{2y}{y^2-4}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$; $\ln(4-y^2) = \ln x + C$ $(*)$

$(*)$ $|y^2-4| = 4-y^2$ perché $y \in \,]0,2[$; $|x| = x$ perché $x \in \,]0,+\infty[$.

$\left.\begin{matrix} x = e \\ y = 1 \end{matrix}\right\}$ in $(*)$ $\to$ $\ln 3 = 1 + C$ $\to$ $C = \ln 3 - 1$; quindi $\boxed{\ln(4-y^2) = \ln x + \ln 3 - 1}$

e allora: $4 - y^2 = e^{\ln x + \ln 3 - 1} = \frac{3x}{e}$; $y^2 = 4 - \frac{3x}{e} = \frac{4e-3x}{e}$;

$y(x) = \sqrt{\frac{4e-3x}{e}}$ (tenendo presente che y deve avere valore positivo)

DOMINIO DELLA SOLUZIONE: oltre a $x > 0$, $\frac{4e-3x}{e} > 0$ quindi $x < \frac{4}{3}e$.
Il dominio è l'intervallo $]0, \frac{4}{3}e[$.

---

2) DETERMINARE E CLASSIFICARE I PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = (x^2-y^2)e^x$

$\begin{cases} f'_x = (2x + x^2 - y^2)e^x = 0 & \to (2x + x^2)e^x = 0 \to x = 0 \vee x = -2 \\ f'_y = -2y\,e^x = 0 & \to y = 0 \end{cases}$

Punti critici: $(0,0)$; $(-2,0)$. La matrice Hessiana di f è:

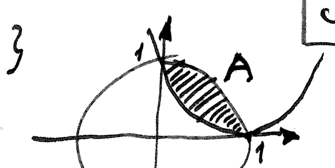
$H(x,y) = \begin{pmatrix} (x^2+4x+2-y^2)e^x & -2y\,e^x \\ -2y\,e^x & -2e^x \end{pmatrix}$; $H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det H = -4 < 0$,

quindi $(0,0)$ è PUNTO DI SELLA per f. ; $H(-2,0) = \begin{pmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{pmatrix}$, che è definita negativa ; quindi $(-2,0)$ è PUNTO DI MASSIMO RELATIVO per f.

CH. IND. 28.01.2016

---

3) $* \iint_A x^3\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge (x-1)^2\}$



L'integrazione riesce più facilmente sezionando A per linee parallele all'asse x. Da $x^2+y^2=1$ segue, per $0 \le y \le 1$, $x = \sqrt{1-y^2}$ (non $\pm\sqrt{\cdots}$ perché A si trova dove $x \ge 0$); da $y = (x-1)^2$ segue $x - 1 = \pm\sqrt{y}$, $x = 1 - \sqrt{y}$ perché A è dove $x \le 1$.

$* = \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y^2}} x^3\,dx \right) dy = \frac{1}{4}\int_0^1 \left((1-y^2)^2 - (1-\sqrt{y})^4 \right) dy =$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(1 + y^4 - 2y^2 - (1 - 4\sqrt{y} + 6y - 4y^{3/2} + y^2) \right) dy =$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(y^4 - 3y^2 + 4\sqrt{y} - 6y + 4y^{3/2} \right) dy = \frac{1}{4}\left[-3y^2 + \frac{1}{5}y^5 - y^3 + \frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}y^{\frac{5}{2}} \right]_{y=0}^{y=1}$

$= \frac{1}{4}\left(-3 + \frac{1}{5} - 1 + \frac{8}{3} + \frac{8}{5} \right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3-60+40+24}{15} = \frac{7}{60}$

---

4) SIA $z = \frac{1}{2+i}e^{(2+i)x}$ CON $x \in \mathbb{R}$, CALCOLARE $Re(z)$, $Im(z)$, $|z|$, $Arg(z)$

$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{5}(2-i)$ $(\equiv z_1)$ $|z_1| = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\arg(z_1) = -\arctan\frac{1}{2}$;

$e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i \operatorname{sen} x) \equiv z_2$; $|z_2| = e^{2x}$; $\arg(z_2) = x$. Perciò

$|z| = |z_1 \cdot z_2| = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{2x}$; $\arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = x - \arctan(\frac{1}{2})$.

Poi: $z = z_1 \cdot z_2 = \frac{e^{2x}}{5}(2-i)(\cos x + i\operatorname{sen} x) = \frac{1}{5}e^{2x}(2\cos x + \operatorname{sen} x + i(2\operatorname{sen} x - \cos x))$,

quindi $Re(z) = \frac{1}{5}e^{2x}(2\cos x + \operatorname{sen} x)$; $Im(z) = \frac{1}{5}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x)$

(ma si può anche scrivere: $Re(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{2x}\cdot\cos(x - \arctan(\frac{1}{2}))$;
$Im\,z = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{2x}\cdot\operatorname{sen}(x - \arctan(\frac{1}{2}))$)

---

5) DETERMINARE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^2$ COMPOSTA DI AUTOVETTORI PER $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. DIAGONALIZZARE A CON UNA MATRICE DI PASSAGGIO M ORTOGONALE DI DETERMINANTE 1 (matrice di una rotazione). STABILIRE L'ANGOLO DI ROTAZIONE E DESCRIVERE L'ENDOMORFISMO DEFINITO DA A RISPETTO ALLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^2$.

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \lambda^2 - 1$; $p(\lambda) = 0$ se $\lambda = \pm 1$

AUTOVETTORI CON $\lambda = 1$: $\begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y = 0 \end{cases} \iff x = -\sqrt{3}\,y$. BASE AUTOSPAZIO: $\left\{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}$

Poiché A è simmetrica, l'autospazio relativo a $\lambda = -1$ è il complemento ortogonale del primo autospazio ; quindi ha per base $\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right\}$

Una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori per A è:
$B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}$. Una matrice M con le proprietà richieste è
$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, con la quale si ha $M^T \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

M rappresenta una rotazione di α, con $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; quindi $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$ da cui $\alpha = -\frac{\pi}{6}$.

L'Endomorfismo definito da A, avendo autovalore 1 per la direzione di $\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}}_{= v_1}$ e autovalore -1 per la direzione di $\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}}_{= v_2}$, lascia inalterata la componente di un generico vettore w lungo $S_1 = Eig(A,1)$, e cambia segno alla componente di w lungo $S_{-1} = Eig(A,-1)$; quindi $A \cdot w$ è simmetrico di w rispetto a S_1.