1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{e^{-y^2}}{2x^3 y}$ ; $y(1) = -\sqrt{\ln 3}$

E.D. a variabili separabili, $y' = f(x)\cdot g(y)$ con $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x \in I = ]0,+\infty[$

$g(y) = \frac{e^{-y^2}}{2y}$, $y \in J = ]-\infty, 0[$

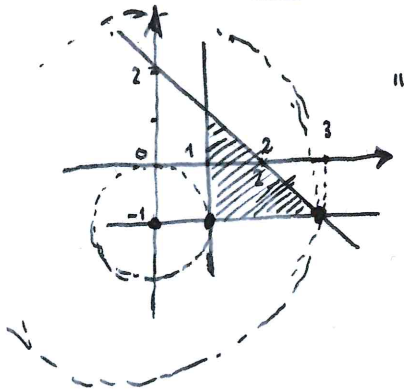
$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-y^2}}{2x^3y}$ ; $\int 2y e^{y^2} dy = \int x^{-3}dx$ ; $e^{y^2} = -\frac{1}{2x^2} + C$ (*) ;

$\left.\begin{matrix}x=1\\ y=-\sqrt{\ln 3}\end{matrix}\right\}$ in (*) $\Rightarrow 3 = -\frac12 + C$ ; $C = \frac72$ quindi $e^{y^2} = -\frac{1}{2x^2} + \frac72$ ;

$y^2 = \ln\left(\frac72 - \frac{1}{2x^2}\right)$ ; $y(x) = -\sqrt{\ln\left(\frac72-\frac{1}{2x^2}\right)}$, tenendo conto che $y(1)<0$.

Dominio della soluzione: oltre a essere $x>0$, bisogna che $\frac72 - \frac{1}{2x^2} > 1$, affinché il radicando sia positivo. Quindi: $\frac{1}{2x^2} < \frac52$, $x^2 > \frac15$ ; infine, $x \in I_0 = ]\frac{1}{\sqrt5}, +\infty[$

2) MINIMO, MASSIMO DI $f(x,y) = x^2+y^2+2y$ IN $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\ge1,\ y\ge -1,\ x+y\le 2\}$




Le linee di livello di $f$ sono: $L_k: \{(x,y)\in\mathbb R^2;\ x^2+y^2+2y=k\}$; "$x^2+y^2+2y-k=0$" è l'equazione di una circonferenza con il centro in $(0,-1)$ e raggio $r=\sqrt{1+k}$ (con $k\ge -1$). Valori di $k$ in crescita fanno aumentare $r$; il minimo di $f$ in $A$ si ottiene nel punto in cui la più piccola tra le circonferenze $L_k$ interseca $A$. Il punto è $(1,-1)$, in corrispondenza del quale è $k = f(1,-1) = 0$.

Il massimo di $f$ in $A$ si ottiene nel punto in cui la più grande tra le $L_k$ interseca $A$. Il punto è $(3,-1)$, e $k = f(3,1) = 8$ ; quindi $0$ e $8$ sono il minimo e il massimo di $f(x,y)$ in $A$.

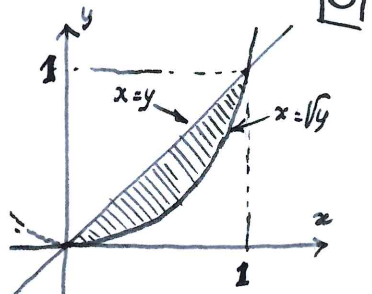
CH. IND. 11. 02. 2016

3) $I = \iint_A x e^{3y^2-2y^3}\, dx\, dy$, $A = \{(x,y)\in\mathbb R^2;\ x^2 \le y \le x\}$

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt y} x e^{3y^2-2y^3} dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac12 x^2 \cdot e^{3y^2-2y^3}\right]_{x=y}^{x=\sqrt y} dy =$$

$$= \frac12\int_0^1 (y-y^2) e^{3y^2-2y^3} dy = \frac{1}{12}\int_0^1 \underbrace{(6y-6y^2)}_{\text{derivata di } 3y^2-2y^3} e^{3y^2-2y^3}dy =$$

$$= \frac{1}{12}\left[e^{3y^2-2y^3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{12}(e-1)$$




4) Sia $w = 2e^{-\frac34\pi i} - 2i \in \mathbb C$.

a) Scrivere $w$ in forma algebrica

b) Calcolare $\operatorname{Im}\left(\frac1w\right)$ (parte immaginaria di $\frac1w$)

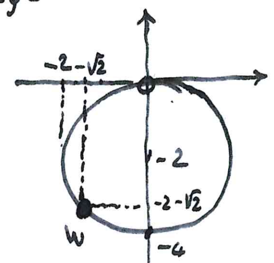
c) Disegnare nel piano complesso $w$ e il luogo dei punti $z\in\mathbb C$ tali che $\operatorname{Im}\left(\frac1z\right) = \frac14$.

a) $w = 2\left(\cos\left(-\frac34\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac34\pi\right)\right) - 2i = -\sqrt2 + (-\sqrt2-2)i$

b) $\frac1w = -\frac{1}{\sqrt2 + (\sqrt2+2)i} = -\frac{\sqrt2 - (\sqrt2+2)i}{2+2+4+4\sqrt2} = \frac{-\sqrt2+(\sqrt2+2)i}{8+4\sqrt2}$

perciò $\operatorname{Im}\left(\frac1w\right) = \frac{\sqrt2+2}{8+4\sqrt2} = \frac{\sqrt2+2}{4(2+\sqrt2)} = \frac14$

c) Sia $z = x+yi$; allora $\frac1z = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$ e $\operatorname{Im}\left(\frac1z\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$. Il luogo cercato ha equazione: $\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac14$ ; $x^2+y^2+4y=0$; quindi è la circonferenza con centro $(0,-2)$ (cioè, $-2i$) e raggio $2$, fatta eccezione per il punto $(0,0)$ (cioè, $z=0\in\mathbb C$) che non ha reciproco. Il punto $w$ appartiene al luogo.




5) Sia $A = \begin{pmatrix}7 & -5\\6 & k\end{pmatrix}$ a) Determinare $k$ in modo che $v = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ sia autovettore per $A$.

b) Con $k$ determinato in (a), calcolare una diagonalizzazione $\Lambda$ di $A$ e una matrice $S$ di cambiamento di base tale che $\Lambda = S\cdot A\cdot S^{-1}$.

a) $A\cdot v = \begin{pmatrix}35-30\\30+6k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\30+6k\end{pmatrix}$, che si desidera proporzionale a $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$; bisogna quindi che sia $30+6k = 6$, $6k = -24$, $k = -4$; con questo valore di $k$, $v$ è autovettore per $A$ con autovalore $1$ perché risulta $A\cdot v = v$; poi è $A = \begin{pmatrix}7&-5\\6&-4\end{pmatrix}$.

b) Con $k=-4$, la traccia di $A$ è $7-4=3$ e un autovalore è $\lambda_1=1$; l'altro autovalore è quindi $\lambda_2=2$ perché $\lambda_1+\lambda_2=3$ (traccia di $A$). L'autospazio relativo a $\lambda_1=1$ è $S_1$, generato da $v = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$. L'autospazio relativo a $\lambda_2=2$ si ottiene da: $\begin{pmatrix}5&-5\\6&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; quindi è $S_2$ generato da $w = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. La matrice $A$ è simile alla matrice diagonale $\Lambda = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ ed è $\Lambda = S\cdot A\cdot S^{-1}$ con $S^{-1} = \begin{pmatrix}5&1\\6&1\end{pmatrix}$, quindi $S = (S^{-1})^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-6&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&1\\6&-5\end{pmatrix}$

$-1 = \det(S^{-1})$

(altrimenti, $A$ è pure simile a $\Lambda' = \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$, e $\Lambda' = S'\cdot A\cdot S'^{-1}$ con $S'^{-1} = \begin{pmatrix}1&5\\1&6\end{pmatrix}$, quindi $S = \begin{pmatrix}6&-5\\-1&1\end{pmatrix}$)