1) PROBLEMA DI CAUCHY ① $5y''+2y'+y=4e^{-\frac{x}{5}}$; $y(0)=6$; $y'(0)=2$

E.D. omogenea associata a ①: ② $5y''+2y'+y=0$

Equ. caratteristica di ②: ③ $5\lambda^2+2\lambda+1=0$; $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{5}\pm\frac{2}{5}i$

Soluzione generale di ②: $\boxed{e^{-\frac{x}{5}}\left(c_1\cos\frac{2x}{5}+c_2\,\mathrm{sen}\,\frac{2x}{5}\right)}$

Ricerca di una soluzione di ①: $f(x)=4e^{-\frac{x}{5}}$ ha

m	α	β	K
0	$-\frac{1}{5}$	0	0

quindi c'è una soluzione $z(x)$ di ① della forma $z(x)=Ae^{-\frac{x}{5}}$, da cui

$z'(x)=-\frac{1}{5}Ae^{-\frac{x}{5}}$, $z''(x)=\frac{1}{25}Ae^{-\frac{x}{5}}$; $5z''+2z'+z=Ae^{-\frac{x}{5}}\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}+1\right)$

desiderato $=4e^{-\frac{x}{5}}$, quindi $\frac{4}{5}A=4$, $A=5$.

SOLUZIONE GENERALE di ①: $\boxed{y(x)=e^{-\frac{x}{5}}\left(5+c_1\cos\frac{2x}{5}+c_2\,\mathrm{sen}\,\frac{2x}{5}\right)}$

da cui $y'(x)=-\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\left(5+c_1\cos\frac{2x}{5}+c_2\,\mathrm{sen}\frac{2x}{5}\right)+e^{-\frac{x}{5}}\left(-\frac{2}{5}c_1\,\mathrm{sen}\frac{2x}{5}+\frac{2}{5}c_2\cos\frac{2x}{5}\right)$

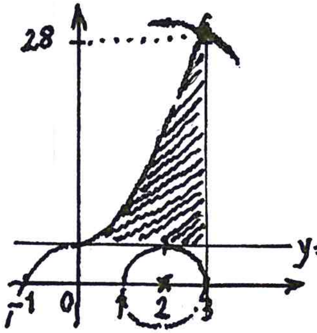
$y(0)=5+c_1=6\longrightarrow c_1=1$

$y'(0)=-\frac{1}{5}(5+1)+\frac{2}{5}c_2=2\rightarrow\frac{2}{5}c_2=\frac{16}{5}\rightarrow c_2=8$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: $\boxed{y(x)=e^{-\frac{x}{5}}\left(5+\cos\frac{2x}{5}+8\,\mathrm{sen}\frac{2x}{5}\right)}$, $x\in]-\infty,+\infty[$

---

2) MINIMO, MASSIMO DI $f(x,y)=x^2+y^2-4x$ IN $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\leq y\leq 1+x^3,\ x\leq 3\}$



Le linee di livello di f sono: $L_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2-4x=k\}$

$x^2+y^2-4x=k$ è l'equazione di una circonferenza con il centro in $(2,0)$ e raggio $\sqrt{4+k}$ (con $k\geq-4$)

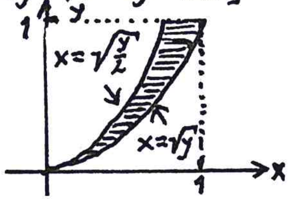
Valori di k in crescita fanno aumentare il raggio; il minimo di f in A si ottiene nel punto in cui la più piccola tra le circonferenze L_k interseca A. Il punto è $(2,1)$, in corrispondenza del quale è $k=f(2,1)=-3$.

Il massimo di f in A si ottiene nel punto in cui la più grande tra le L_k interseca A. Il punto è $(3,28)$, e $k=f(3,28)=781$; quindi -3 e 781 sono il minimo e il massimo di $f(x,y)$ in A.

---

3) $I=\iint_A\frac{x^3}{y^3+2}\,dx\,dy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ x^2\leq y\leq 2x^2\}$

$$I=\int_0^1\left(\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}}\frac{x^3}{y^3+2}\,dx\right)dy$$



$$I=\int_0^1\frac{1}{y^3+2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=\sqrt{\frac{y}{2}}}^{x=\sqrt{y}}dy=\int_0^1\frac{1}{y^3+2}\left(\frac{y^2}{4}-\frac{y^2}{16}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{16}\int_0^1\frac{3y^2}{y^3+2}\,dy=\frac{1}{16}\left[\ln|y^3+2|\right]_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{16}(\ln 3-\ln 2)=$$

$$=\frac{1}{16}\ln\frac{3}{2}$$

CH. IND. 01. 04. 2016

---

4) Sia $z^6=-64$. Scrivere tutte le soluzioni $z\in\mathbb{C}$ in forma algebrica e in forma esponenziale; rappresentare tale soluzioni graficamente nel piano complesso.

Modulo, argomento di $w=-64$: $|-64|=64=2^6$; $\arg(-64)=\pi$

Le soluzioni di $z^6=-64$ sono:

$z=z_k=\sqrt[6]{2^6}\left(\cos\frac{\pi+k2\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi+k2\pi}{6}\right)$, $k=0,1,2,3,4,5$.

$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

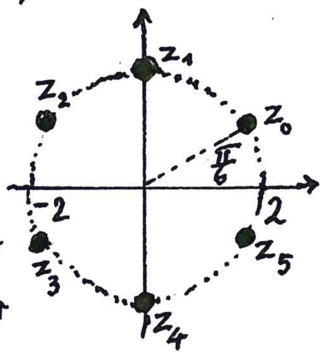
$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_2=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{5}{6}\pi}$

$z_3=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}-i=2e^{i\frac{7}{6}\pi}$

$z_4=2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{2}\pi\right)=-2i=2e^{i\frac{3}{2}\pi}$

$z_5=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{11}{6}\pi\right)=\sqrt{3}-i=2e^{i\frac{11}{6}\pi}$



---

5) Sia $A=\begin{pmatrix}7&k\\4&l\end{pmatrix}$. a) Determinare k, l in modo che $v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sia autovettore per A relativo all'autovalore 3.

b) Con k, l determinati in a), A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}^2$?

c) Con k, l determinati in a), A è invertibile? Se sì, qual è l'inversa?

a) $A\cdot v=\begin{pmatrix}7+k\\4+l\end{pmatrix}$, che si desidera sia uguale a $3v=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$; bisogna quindi che sia $7+k=3$ e $4+l=3$; risulta $\boxed{k=-4,\ l=-1}$.

b) L'equ. caratteristica di $\begin{pmatrix}7&-4\\4&-1\end{pmatrix}$ è: $\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2=0$, cioè $\lambda=3$ è autovalore doppio. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 3: $\dim E_g(A,3)=$ $=2-\mathrm{rango}(A-3I)=2-\mathrm{rango}\begin{pmatrix}4&-4\\4&-4\end{pmatrix}=2-1=1$, che non coincide con la molteplicità alg. di $3\Rightarrow$ non diagonalizzabile.

c) $\begin{vmatrix}7&-4\\4&-1\end{vmatrix}=9\neq0\Rightarrow A$ è invertibile e $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1&4\\-4&7\end{pmatrix}$.