1) PROBLEMA DI CAUCHY: ① $3y''+y' = 20xe^{-x}$; $y(0)=6$, $y'(0)=2$

E.D. omogenea associata: ② $3y''+y'=0$

equazione caratteristica di ②: ③ $3\lambda^2+\lambda=0 \to \lambda = 0,\ -\frac{1}{3}$

SOLUZIONI DI ②: $C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$

$f(x)=20xe^{-x}$ e ④ con $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0\end{array}$ quindi cerchiamo una soluzione di ① della forma: ⑤' $z(x)=(ax+b)e^{-x}$; allora:

$z'(x)=(a-ax-b)e^{-x}$; $z''(x)=(-2a+ax+b)e^{-x}$.

$\left.\begin{array}{l}3z''\\+z'\end{array}\right\} = \left\{ e^{-x}\left[\begin{array}{l} 3ax - 6a+3b \\ -ax + a - b\end{array}\right]\right.$

$= e^{-x}(2ax - 5a + 2b)$ desiderato $=20xe^{-x}$. Allora:

$\begin{cases}2a=20\\-5a+2b=0\end{cases} \to \begin{cases}a=10\\b=25\end{cases}$; $z(x)=(10x+25)e^{-x}$

SOLUZIONE GENERALE DI ①: $y(x)=(10x+25)e^{-x}+C_1+C_2e^{-\frac{1}{3}x}$

da cui $y'(x)=(-10x-15)e^{-x}-\frac{1}{3}C_2e^{-\frac{1}{3}x}$

$\begin{array}{l} y(0)= \\ y'(0)= \end{array}\left\{\begin{array}{l} 25+C_1+C_2=6 \to C_1=-25-C_2+6=32 \\ -15-\frac{1}{3}C_2=2 \to 45+C_2=-6,\ C_2=-51\end{array}\right.$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: $y(x)=(10x+25)e^{-x}+32-51e^{-\frac{1}{3}x}$ $x\in]-\infty,+\infty[$

CH. IND. 06.06.2016

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y)=(9x^2-y^2)\ln x$

$\begin{array}{l} f'_x = \\ f'_y = \end{array}\left\{\begin{array}{l} 18x\ln x + 9x - \frac{y^2}{x} = 0 \quad ① \\ -2y\ln x = 0 \quad ② \to y=0 \text{ o } x=1\end{array}\right.$

SE $y=0$ ① $\to 9x(2\ln x+1)=0 \to$ $x=0$ (non accettabile) ; $\ln x=-\frac{1}{2} \to x=e^{-\frac{1}{2}}$

PUNTO CR.: $A=(e^{-\frac{1}{2}}, 0)$

SE $x=1$ ① $\to y^2=9 \to y=\pm3$. P. CR. $B=(1,3)$, $C=(1,-3)$

CALCOLO MATRICE HESSIANA: $f''_{xx}=18\ln x+27+\frac{y^2}{x^2}$; $f''_{xy}=-\frac{2y}{x}$; $f''_{yx}=\frac{-2y}{x}$; $f''_{yy}=-2\ln x$

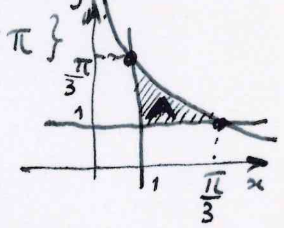
$H(x,y)=\begin{pmatrix}18\ln x+27+\frac{y^2}{x^2} & -\frac{2y}{x}\\ -\frac{2y}{x} & -2\ln x\end{pmatrix}$; $H(A)=\begin{pmatrix}18&0\\0&1\end{pmatrix}$ $18>0$, $\det H(A)=18>0$

$\Rightarrow A=(e^{-1/2},0)$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO

$H(B)=\begin{pmatrix}36&-6\\-6&0\end{pmatrix}$; $\det H(B)=-36<0 \Rightarrow B=(1,3)$ PUNTO DI SELLA

$H(C)=\begin{pmatrix}36&6\\6&0\end{pmatrix}$; $\det H(C)=-36<0 \Rightarrow C=(1,-3)$ PUNTO DI SELLA

3) $\iint_A \frac{y}{\cos^2(xy)}\,dx\,dy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq1,\ y\geq1,\ 3xy\leq\pi\}$



$\iint_A \frac{y}{\cos^2(xy)}\,dx\,dy = \int_1^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_1^{\frac{\pi}{3y}} \frac{y}{\cos^2(xy)}\,dx\right)dy =$

$= \int_1^{\frac{\pi}{3}}\left[\tan(xy)\right]_{x=1}^{x=\frac{\pi}{3y}} dy = \int_1^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\tan y\right)dy =$

$= \int_1^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{3} + \frac{-\sin y}{\cos y}\right)dy = \left[\sqrt{3}\, y+\ln(\cos y)\right]_{y=1}^{y=\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\sqrt{3}-\ln(\cos(1)).$

4) W_k $(k=1;2)$ (def.) RADICI QUADRATE DI $1+i$

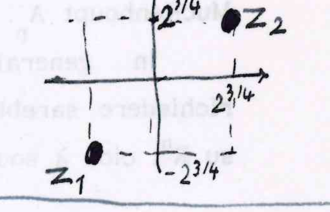
$Z_k = W_k^{-1}\cdot e^{\frac{3}{8}\pi i}$ Scrivere z_1, z_2 in forma algebrica e in forma esponenziale, e rappresentarli nel piano complesso

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$, quindi $W_k = \sqrt[4]{2}\, e^{i(\frac{\pi}{8}+k\pi)}$, $k=1;2$

e allora $W_k^{-1}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{i(-\frac{\pi}{8}-k\pi)}$, $k=1;2$ e $z_k=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}-k\pi)}$,

vale a dire $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$, precisamente

$z_1 = -\frac{1}{2^{3/4}}(1+i)$, $z_2=\frac{1}{2^{3/4}}(1+i)=-z_1$



5) $A=\begin{pmatrix}1&k&1\\l&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$; determinare k, l affinché $v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sia autovettore per A.

Per tali k, l determinare autovalori e autovettori per A, e una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori per A

$A\cdot v = \begin{pmatrix}2+k\\l+2\\2\end{pmatrix}$ desiderato proporzionale a $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Allora deve essere $\begin{cases}2+k=2\\l+2=2\end{cases}$

quindi $l=k=0$, e perciò $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ (REALE SIMMETRICA)

$\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1)+1(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda-\lambda^2+2) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$

Autovettori con $\lambda=1$ $(A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{cases}z=0\\z=0\\x+y-z=0\end{cases} \to (x,y,z)=(x,-x,0)$

S_1 (autospazio) $=\mathrm{Span}\{(1,-1,0)\}$

S_2 (autospazio relativo a $\lambda=2$) è noto, ed è $\mathrm{Span}\{(1,1,1)\}$

S_{-1} (autospazio relativo a $\lambda=-1$) soluzioni di $(A+I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,

$\begin{cases}2x+z=0\\2y+z=0\\x+y+2z=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}z\\y=-\frac{1}{2}z\\\text{identità}\end{cases} \to (x,y,z)=\left(-\frac{1}{2}z,-\frac{1}{2}z, z\right)$

$S_{-1}=\mathrm{Span}\{(1,1,-2)\}$

Una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A si ottiene normalizzando i generatori di S_1, S_2, S_{-1}, ed è

$\mathcal{B}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right);\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$