1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{6xy}{x^2-4} + 8x$; $y(\sqrt3) = 5$

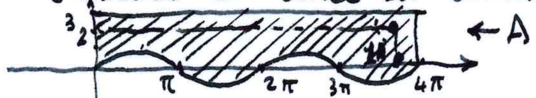
È una e.d. lineare di ordine 1 " $y' = a\cdot y + b$ " con $a(x) = \frac{6x}{x^2-4}$, $b(x) = 8x$, $x \in I =]-2,2[$. Abbiamo $A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{6x}{x^2-4}dx = 3\ln(4-x^2)$, tenendo conto che $x\in]-2,2[$. Allora:

$$y(x) = e^{3\ln(4-x^2)}\left(C + \int 8x\cdot e^{-3\ln(4-x^2)}dx\right) = (4-x^2)^3\left(C+\int 8x\cdot(4-x^2)^{-3}dx\right) =$$
$$= (4-x^2)^3\left(C - 4\cdot\frac{(4-x^2)^{-2}}{-2}\right) = (4-x^2)^3\left(C+\frac{2}{(4-x^2)^2}\right).$$ Ora calcoliamo C:

$y(\sqrt3) = C+2$ desiderato $= 5$; quindi $C=3$, e la soluzione è:

$$y(x) = (4-x^2)^3\left(3+\frac{2}{(4-x^2)^2}\right) = 3(4-x^2)^3 + 2(4-x^2), \quad x\in]-2,2[$$

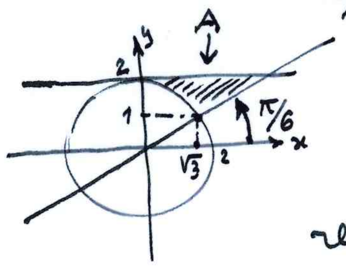
2) MINIMO, MASSIMO DI $f(x,y) = (x-11)^2+(y-2)^2$ in $A = \{(x,y)\in\mathbb R^2, 0\le x\le 4\pi, \operatorname{sen} x \le y\le 3\}$ (usare le linee di livello di f)



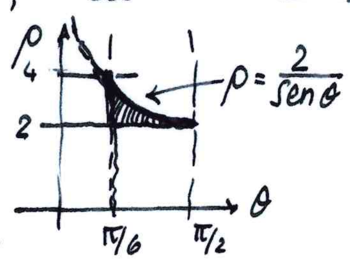
Le linee di livello di f sono gli insiemi $L_k = \{(x,y)\in\mathbb R^2, (x-11)^2+(y-2)^2 = k\}$. $L_k=\emptyset$ se $k<0$, $L_k = \{(11,2)\}$ se $k=0$, L_k è una circonferenza con centro $C=(11,2)$ e raggio $\sqrt k$, se $k>0$. Il livello minimo assunto da f in A è quindi $f(11,2)=0$; il livello massimo è il più grande k per il quale L_k ha punti in comune con A; il punto di A più distante da $C=(11,2)$ è $B=(0,0)$; L_k passa per B se $(0-11)^2+(0-2)^2 = k$, cioè $k=125$. Quindi il minimo e il massimo di f in A valgono rispettivamente 0 e 125.

CH. IND. 05.07.2016

3) CALCOLARE: $\iint_A y\,dx\,dy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb R^2; x\ge0, x^2+y^2\ge4, \frac{x}{\sqrt3}\le y\le 2\}$



Possiamo usare le coordinate polari $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\operatorname{sen}\theta\end{cases}$. L'insieme $B=\{\rho\ge0, \theta\in[0,2\pi], (\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)\in A\}$ è: $B=\{(\rho,\theta); \frac\pi6\le\theta\le\frac\pi2, 2\le\rho\le\frac{2}{\operatorname{sen}\theta}\}$; la relazione $\rho\le\frac{2}{\operatorname{sen}\theta}$ segue da $y\le2$ cioè $\rho\operatorname{sen}\theta\le2$ da cui $\rho\le\frac2{\operatorname{sen}\theta}$, tenendo presente che $\frac\pi6\le\theta\le\frac\pi2 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta>0$. Allora:

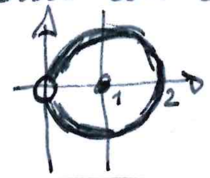


$$\iint_A y\,dx\,dy = \iint_B \rho^2\operatorname{sen}\theta\,d\rho\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\int_2^{2/\operatorname{sen}\theta}(\rho^2\operatorname{sen}\theta)d\rho\right)d\theta =$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[\frac13\rho^3\operatorname{sen}\theta\right]_{\rho=2}^{\rho=\frac{2}{\operatorname{sen}\theta}}d\theta = \frac13\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac{8}{\operatorname{sen}^2\theta} - 8\operatorname{sen}\theta\right)d\theta = \frac13\left[-8\cot\theta+8\cos\theta\right]_{\theta=\frac\pi6}^{\theta=\frac\pi2} =$$
$$= \frac13(8\sqrt3-4\sqrt3) = \frac43\sqrt3.$$

4) DATO IL NUMERO COMPLESSO $w = e^{\frac\pi3 i}+1$, (·) CALCOLARE $Re(\frac1w)$ e $Im(\frac1w)$ → PARTI REALE E IMMAGINARIA DI $\frac1w$; (··) DISEGNARE NEL PIANO COMPLESSO IL LUOGO DEI PUNTI z TALI CHE $Re\frac1z = \frac12$.

Soluzione: (·) $w = \cos(\frac\pi3)+1+i\operatorname{sen}(\frac\pi3) = \frac32+\frac{\sqrt3}2 i$; allora:
$\frac1w = \frac{\frac32-\frac{\sqrt3}2 i}{(\frac32)^2+(\frac{\sqrt3}2)^2} = \frac{\frac32-\frac{\sqrt3}{2}i}{\frac94+\frac34} = \frac12-\frac{\sqrt3}6 i$ quindi $\begin{cases}Re(\frac1w)=\frac12\\ Im(\frac1w) = \frac{-\sqrt3}6\end{cases}$.

(··) Se $z = x+yi\ne0$, allora $\frac1z = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$ e $Re(\frac1z) = \frac{x}{x^2+y^2}$; allora $Re(\frac1z)=\frac12 \iff \frac{x}{x^2+y^2}=\frac12 \iff x^2+y^2-2x=0$. Questa equazione rappresenta il luogo cercato, che è la circonferenza con centro $(1,0)$ (cioè $1\in\mathbb C$) e raggio 1, dalla quale bisogna escludere il punto $(0,0) = 0\in\mathbb C$, perché se $z=(0,0)$ non esiste $\frac1z$.

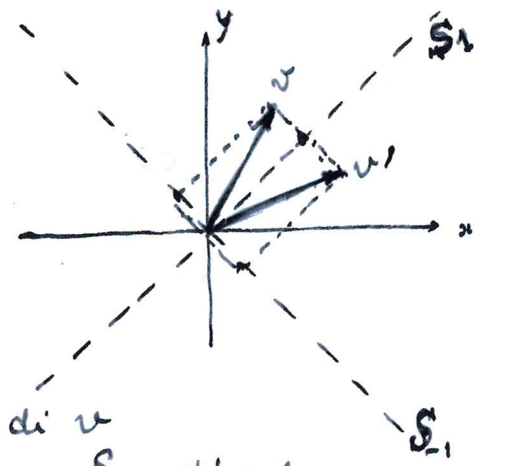


5) DETERMINARE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb R^2$ COMPOSTA DI AUTOVETTORI PER $A = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$; DIAGONALIZZARE A CON UNA MATRICE DI PASSAGGIO ORTOGONALE*, CIOÈ LA MATRICE DI UNA ROTAZIONE. STABILIRE QUAL È L'ANGOLO DI ROTAZIONE (* DI DETERMINANTE 1) E DESCRIVERE GEOMETRICAMENTE L'ENDOMORFISMO DEFINITO DA A RISPETTO ALLA BASE CANONICA DI $\mathbb R^2$

- Autovalori per A: $\det\begin{pmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2-1$; questo vale 0 se $\lambda = \begin{cases}1\\-1\end{cases}$
- Autospazio per $\lambda=1$: $\begin{cases}-x+y=0\\x-y=0\end{cases} \to (x,y) = (x,x)$, $\forall x\in\mathbb R$
  Base autospazio (con vettore di norma 1): $\mathcal B_1 = \{(\frac1{\sqrt2},\frac1{\sqrt2})\}$
- Autospazio per $\lambda=-1$: $\begin{cases}x+y=0\\x+y=0\end{cases}\to (x,y)=(x,-x)$, $\forall x\in\mathbb R$
  Base autospazio (con vettore di norma 1): $\mathcal B_{-1} = \{(\frac{-1}{\sqrt2},\frac1{\sqrt2})\}$

Detta P la matrice che ha per colonne i vettori di $\mathcal B_1$, $\mathcal B_{-1}$, cioè $P = \begin{pmatrix}1/\sqrt2 & -1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2\end{pmatrix}$ essa è ortogonale ($P^{-1}=P^T$), ha determinante $=1$, e diagonalizza A; infatti $P^T\cdot A\cdot P = P^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, come si ottiene svolgendo direttamente il calcolo.

- L'endomorfismo associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbb R^2$ lascia fissi i vettori di S_1 (autospazio di $\lambda=1$), muta nel suo opposto ogni vettore di S_{-1} (autospazio di $\lambda=-1$); perciò un generico vettore $v\in\mathbb R^2$ viene mutato nel vettore v' simmetrico di v rispetto a S_1, perché il componente di v lungo S_1 rimane immutato, quello lungo S_{-1} diventa l'opposto di ciò che era.



- L'angolo di rotazione associato alla matrice P è α tale che $P^T = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$ cioè $\cos\alpha = -\operatorname{sen}\alpha = \frac1{\sqrt2}$; $\alpha = -\frac\pi4$.