1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \dfrac{x y^3}{x^2+1}$; $y(0) = -\dfrac{1}{2}$

(E.D. a variabili separabili) : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^3}{x^2+1}$; $\int y^{-3}\,dy = \int \dfrac{x}{x^2+1}\,dx$;

$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x}{x^2+1},\ x \in I =]-\infty, +\infty[\\ g(y) = y^3,\ y \in J =]-\infty, 0[\end{array}}$

$-\dfrac{1}{2y^2} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$; con $x=0$, $y=-\frac{1}{2}$ si ottiene: $-2 = C$, quindi $-\dfrac{1}{2y^2} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2$;

$y^2 = \dfrac{1}{4-\ln(x^2+1)}$; quindi, tenendo conto che deve essere $y<0$, si trova

$\boxed{y(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{4-\ln(x^2+1)}}}$. Dominio della soluzione: deve essere $4-\ln(x^2+1)>0$, $\ln(x^2+1)<4$, $x^2+1<e^4$, $x^2<e^4-1$, $\boxed{x \in \left]-\sqrt{e^4-1}, \sqrt{e^4-1}\right[}$

2) PUNTI CRITICI PER: $f(x,y) = 27x^2 - 36y - 36xy - 18y^2 + 8y^3$

$\begin{cases} f'_x = 54x - 36y = 0 & (1) \\ f'_y = -36 - 36x - 36y + 24y^2 = 0 & (2) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} (1) \to x = \frac{2}{3}y \\ (2) \to 2y^2 - 5y - 3 = 0 \to (y = -\frac{1}{2} \vee y = 3) \end{cases}$

Se $y=3$ allora $x=2$; se $y=-\frac{1}{2}$ allora $x=-\frac{1}{3}$, quindi ci sono due punti critici: $P=(2,3)$; $Q=(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$.

La matrice Hessiana di f è: $H(x,y) = \begin{pmatrix} 54 & -36 \\ -36 & 48y-36 \end{pmatrix}$; allora:

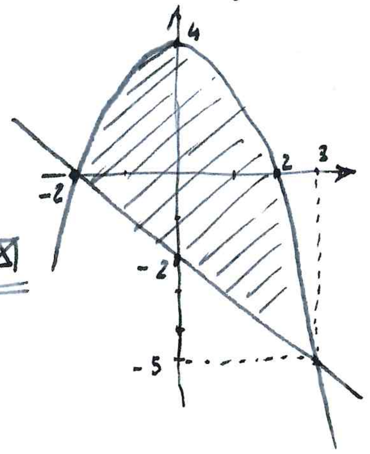
$H(2,3) = \begin{pmatrix} 54 & -36 \\ -36 & 108 \end{pmatrix}$; $\det H > 0$ e $f''_{xx} = 54 > 0$, quindi $(2,3)$ è punto di MINIMO RELATIVO per f.

$H(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 54 & -36 \\ -36 & -60 \end{pmatrix}$; $\det H < 0$, quindi $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ è PUNTO DI SELLA per f.

3) $\iint_A x e^y\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y-4 \le 0 \le x+y+2\}$

Le disuguaglianze che definiscono A equivalgono a: $-2-x \le y \le 4-x^2$

La retta $y=-2-x$ e la parabola $y=4-x^2$ s'intersecano nei punti $(-2,0)$ e $(3,-5)$.



$\iint_A x e^y\,dx\,dy = \int_{-2}^{3}\left(\int_{-2-x}^{4-x^2} x e^y\,dy\right)dx =$

$= \int_{-2}^{3}\left[x e^y\right]_{y=-2-x}^{y=4-x^2} dx = \int_{-2}^{3}\left(x e^{4-x^2} - x e^{-2-x}\right)dx$ ☒

Calcoliamo ora le primitive necessarie.

• $\int x e^{4-x^2} = -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x}_{\text{derivata di } 4-x^2} e^{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} e^{4-x^2}$.

•• $\int x e^{-2-x}\,dx =$ (per parti) $-x e^{-2-x} + \int e^{-2-x}\,dx = (-x-1)e^{-2-x}$; e allora

$\int_{-2}^{3}\left(x e^{4-x^2} - x e^{-2-x}\right)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{4-x^2} + (x+1)e^{-2-x}\right]_{x=-2}^{x=3} = -\frac{1}{2}e^{-5} + 4e^{-5} + \frac{1}{2} + 1 =$

$= \frac{7}{2}e^{-5} + \frac{3}{2}$.

CH. IND. 16.02.2016

4) (NUMERI COMPLESSI). $z = \dfrac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{(1+i)^2}$. Scrivere z^{-1} in forma esponenziale, cioè $z^{-1} = \rho e^{i\theta}$ con $\rho>0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Servono modulo e argomento di z. Conviene scrivere $(1+i)^2$ in forma esponenziale. $|1+i| = \sqrt{2}$; $\arg(1+i) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$; quindi $1+i = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$; $(1+i)^2 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$, e allora

$z = \dfrac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{2e^{\frac{\pi}{2}i}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$; $z^{-1} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

5) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ b & 3 & c \\ 3 & d & 1 \end{pmatrix}$. Determinare a,b,c,d in modo che $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia autovettore per A, e $\mathbb{R}^3$ abbia una base ORTONORMALE formata da autovettori per A. Assegnati ad a,b,c,d tali valori, determinare una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A.

Una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A esiste se e solo se A è SIMMETRICA. Quindi deve essere $b=a$, $d=c$, cosicché $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ a & 3 & c \\ 3 & c & 1 \end{pmatrix}$; $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+a \\ a+c+3 \\ 4+c \end{pmatrix}$. Questo vettore deve essere proporzionale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi le tre componenti debbono essere uguali, cioè $\begin{cases} 4+a = 4+c \\ a+c+3 = 4+c \end{cases}$ da cui si deduce $\begin{cases} a=1 \\ c=1 \end{cases}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. In questo modo è $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, quindi si vede che l'autovalore corrispondente è 5

Per calcolare gli altri autovalori: $\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (1-2\lambda+\lambda^2)(3-\lambda) + 3 + 3 - 9(3-\lambda) - 2(1-\lambda) = 3-\lambda-6\lambda+2\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3+6-27+9\lambda-2+2\lambda =$

$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda - 20 = (\lambda-5)(-\lambda^2+4)$ le cui radici sono: 5, 2, −2

L'autospazio relativo a $\lambda=5$ è generato da $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (già noto)

Autospazio relativo a $\lambda=2$: $(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} -x+y+3z=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x+y-z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=z \\ y=-2z \end{cases}$;

l'autospazio è generato da $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Autospazio relativo a $\lambda=-2$: $(A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 3x+y+3z=0 \\ x+5y+z=0 \\ 3x+y+3z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$;

l'autospazio è generato da $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A, e necessariamente ortonormale, ha per elementi v, w, u, divisi per le rispettive norme, cioè: $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$.