1) PROBLEMA DI CAUCHY: ① $y''+6y'+10y = 39\,\text{sen}\,x$; $y(0)=-2$; $y'(0)=0$

E.D. omogenea associata a ①: ② $y''+6y'+10y=0$

Equazione caratteristica di ②: ③ $\lambda^2+6\lambda+10=0 \to \lambda=-3\pm i$

Soluzioni di ②: $e^{-3x}(C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$f(x) = 39\,\text{sen}\,x\; e^{-}$ "del tipo ④" con parametri $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$; quindi c'è una soluzione di ① della forma: ⑤ $z(x) = A\cos x + B\,\text{sen}\,x$, da cui:

$z'(x) = -A\,\text{sen}\,x + B\cos x$; $z''(x) = -A\cos x - B\,\text{sen}\,x$; e allora

$$\left.\begin{array}{l} z'' \\ +6z' \\ +10z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -A\cos x - B\,\text{sen}\,x \\ +6B\cos x - 6A\,\text{sen}\,x \\ +10A\cos x + 10B\,\text{sen}\,x \end{array}\right. = (9A+6B)\cos x + (-6A+9B)\,\text{sen}\,x$$

Il risultato desiderato è: $39\,\text{sen}\,x$; perciò deve essere:

$$\begin{cases} 9A+6B=0 \\ -6A+9B=39 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3A+2B=0 \\ -2A+3B=13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=-\frac{3}{2}A \\ -2A-\frac{9}{2}A=13 \end{cases} ; \quad \begin{cases} B=3 \\ A=-2 \end{cases}$$ quindi $z(x) = -2\cos x + 3\,\text{sen}\,x$

La soluzione generale di ① è: $y(x) = -2\cos x + 3\,\text{sen}\,x + e^{-3x}(C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x)$

e quindi $y'(x) = 2\,\text{sen}\,x + 3\cos x + e^{-3x}(-3C_1\cos x - 3C_2\,\text{sen}\,x - C_1\,\text{sen}\,x + C_2\cos x)$

Allora: $y(0) = -2+C_1$; $y'(0) = 3-3C_1+C_2$; desideriamo quindi che sia:

$$\begin{cases} -2+C_1=-2 \\ 3-3C_1+C_2=0 \end{cases}$$ da cui $$\begin{cases} C_1=0 \\ C_2=-3 \end{cases}$$; la soluziona del problema di Cauchy è:

$$\boxed{y(x) = -2\cos x + 3\,\text{sen}\,x - 3e^{-3x}\,\text{sen}\,x, \quad x\in\,]-\infty,+\infty[}$$

CH. IND. 20.01.2017

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = (x^2+4y)e^{x+y}$

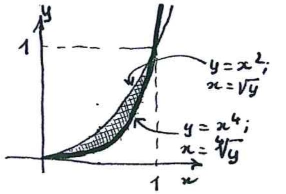
$$\begin{array}{l} f'_x = \\ f'_y = \end{array}\begin{cases} (2x+x^2+4y)e^{x+y} = 0 & ① \\ (4+x^2+4y)e^{x+y} = 0 & ② \end{cases} \to \begin{cases} 2x-4=0 \to x=2 \\ x^2+4y=-4 \to 4+4y=-4 \to y=-2 \end{cases}$$

C'è un solo punto critico: $(2;-2)$. La matrice Hessiana di f è:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} (2+2x+2x+x^2+4y)e^{x+y} & (4+2x+x^2+4y)e^{x+y} \\ (2x+4+x^2+4y)e^{x+y} & (4+4+x^2+4y)e^{x+y} \end{pmatrix}$$ e allora

$H(2,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; $\det H = 8>0$; $f''_{xx}=6>0 \Rightarrow (2,-2)$ punto di MINIMO RELATIVO

3) CALCOLARE L'INTEGRALE: $* \iint_A \frac{x^3}{1+y^2}\,dx\,dy$; $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\ge 0,\ x^4\le y\le x^2\}$



(Riduzione per linee parallele all'asse x):

$$* = \int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} \frac{x^3}{1+y^2}\,dx\right)dy = \int_0^1 \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{1+y^2}\right]_{x=\sqrt{y}}^{x=\sqrt[4]{y}} dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{y-y^2}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2}\,\frac{2y}{1+y^2}\,dy - \frac{1}{4}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)dy$$

$$= \left[\frac{1}{8}\ln(1+y^2) - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}\arctan y\right]_{y=0}^{y=1} = \underline{\frac{1}{8}\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{16}}$$

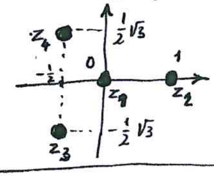
4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $z^2=\bar z$; RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LE SOLUZIONI

Sia $z = x+yi$ con $x,y\in\mathbb{R}$; allora $z^2 = x^2-y^2+2xyi$, $\bar z = x-yi$;

$z^2=\bar z \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi = x-yi$; debbono coincidere sia le parti reali, sia i coefficienti dell'immaginario: $\begin{cases} x^2-y^2=x \\ 2xy=-y \end{cases} \to \begin{cases} x^2-y^2-x=0 & ① \\ y(2x+1)=0 & ⑪ \end{cases}$

⑪ $\to$ $y=0 \vee x=-\frac{1}{2}$. Se $y=0$, ① $\to x^2-x=0 \to x=0 \vee x=1$ da cui le soluzioni $(x,y)=(0,0)$, $(x,y)=(1,0)$ ossia $z_1=0 \vee z_2=1$. Se $x=-\frac{1}{2}$ allora ① $\to \frac{1}{4}-y^2+\frac{1}{2}=0$, $y^2=\frac{3}{4}$, $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ da cui $(x,y)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3}) \vee (x,y)=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3})$

ossia $z_3 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \quad \vee \quad z_4 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$



5) CALCOLARE AUTOVALORI E UNA BASE PER OGNI AUTOSPAZIO DI $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \\ k & 0 & -3 \end{pmatrix}$. DIRE PER QUALI k, A È DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{R}$

Polinomio caratteristico di A: $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 6 \\ k & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(-3-\lambda)$; le radici di $p(\lambda)$ sono: $\lambda=-3$ (semplice); $\lambda=3$ (doppia)

Autospazio relativo a $\lambda=-3$: soluzioni di: $(A+3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè: $\begin{cases} 6x=0 \\ -x+6y+6z=0 \\ kx=0 \end{cases}$ da cui $x=0$, $z=-y$. L'autospazio ha dimensione 1, necessariamente; esso è $S_{-3} = \{(0,y,-y),\ y\in\mathbb{R}\}$; una base per S_{-3} è $\{(0,1,-1)\}$

Autospazio relativo a $\lambda=3$: soluzioni di $(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè: $\begin{cases} 0=0 \\ -x+6z=0 \\ kx-6z=0 \end{cases}$. La matrice dei coefficienti del sistema è $A-3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \\ k & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Se $k\neq 1$, rango $(A-3I)=2$; le soluzioni del sistema sono $(0,y,0)$ $\forall y\in\mathbb{R}$, $S_3=\{(0,y,0),\ y\in\mathbb{R}\}$, una cui base è $\{(0,1,0)\}$; $\dim S_3=1$, mentre la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda=3$ è $\underline{2}$. Quindi se $k\neq 1$, **A** non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (e nemmeno su $\mathbb{C}$)

Se $k=1$ allora $A-3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ ha rango 1; le soluzioni del sistema, cioè gli autovettori, sono $(6z,y,z)$ $\forall y,z\in\mathbb{R}$, cioè $S_3=\{(6z,y,z);\ y,z\in\mathbb{R}\}$

In questo caso **A** è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Una base per S_3 è $\{(0,1,0);\ (6,0,1)\}$. [Una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per **A** è $\mathcal{B} = \{(0,1,-1);\ (0,1,0);\ (6,0,1)\}$. L'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è associato alla matrice A, rispetto alla base $\mathcal{B}$ è associato alla matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$]