1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{2x^2+3}{x} y + 6x^4$; $y(1) = -2$

E.D. lineare di 1° ordine "$y' = ay + b$" con $a(x) = \frac{2x^2+3}{x}$, $b(x) = 6x^4$; $x \in I =]0,+\infty[$.

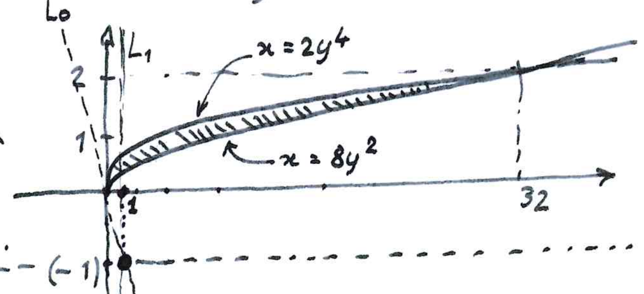
$A(x) = \int a(x)\,dx = \int (2x + \frac{3}{x})\,dx = x^2 + 3\ln x$; le soluzioni della E.D. in I sono:

$$y(x) = e^{x^2+3\ln x}\left(C + \int 6x^4 e^{-x^2-3\ln x} dx\right) = x^3 e^{x^2}\left(C + \int 6x e^{-x^2} dx\right) =$$

$$= x^3 e^{x^2}\left(C - 3\int e^{-x^2}\cdot(-2x)\,dx\right) = x^3 e^{x^2}\left(C - 3e^{-x^2}\right) = Cx^3e^{x^2} - 3x^3$$

Calcoliamo C: $y(1) = Ce - 3$, desiderato $= -2$; $Ce = 1$, $C = e^{-1}$. Allora la soluzione del problema di Cauchy è: $y(x) = x^3(e^{x^2-1} - 3)$, $x \in]0,+\infty[$.

2) CALCOLARE IL MINIMO E IL MASSIMO VALORE CHE $f(x,y) = \frac{x+y}{1+y}$ ASSUME IN $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0,\ 2y^4 \leq x \leq 8y^2\}$.



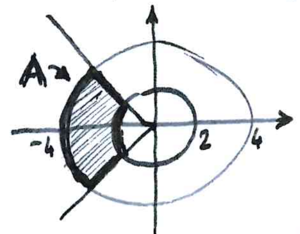
$\begin{cases} x = 2y^4 \\ x = 8y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 8y^2 \\ 2y^4 = 8y^2 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0),\ (32,2),\ (32,-2) \notin A$

Le linee di livello di f sono rappresentate da: (L_k): $\frac{x+y}{1+y} = k$, cioè $x + y - k(1+y) = 0$.

Esse formano un FASCIO PROPRIO DI RETTE, con il centro nel punto $(1,-1)$. La "retta persa" ha equazione: $1 + y = 0$. Le rette del fascio si muovono in verso orario quando k cresce. Perciò il valore minimo assunto da f in A è k corrispondente alla retta L_k che passa per $(0,0)$: $k = 0$ [MINIMO DI f IN A]; il massimo è k corrispondente alla retta L_k che passa per $(32,2)$: $k = \frac{34}{3}$ [MASSIMO DI f IN A]

CH. IND. 06.02.2017

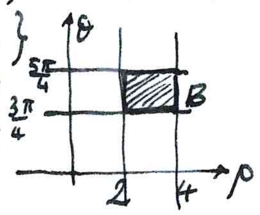
3) INTEGRALE DOPPIO: $\iint \frac{x+1}{(x^2+y^2)^2} dx\,dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 4 \leq x^2+y^2 \leq 16,\ x + |y| \leq 0\}$



Conviene applicare le coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$.

Si vede facilmente che $B = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi[,\ (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) \in A\}$

è l'insieme: $B = \{(\rho,\theta);\ 2 \leq \rho \leq 4;\ \frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi\}$

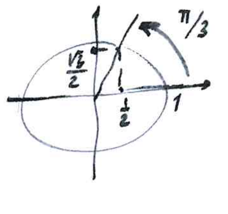


$$\iint_A \frac{x+1}{(x^2+y^2)^2} dx\,dy = \iint_B \frac{\rho\cos\theta + 1}{\rho^4}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \int_2^4\left(\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(\frac{\cos\theta}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^3}\right)d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_2^4 \left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2} + \frac{\theta}{\rho^3}\right]_{\theta=\frac{3\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}} d\rho = \int_2^4 \left(-\sqrt{2}\cdot\rho^{-2} + \frac{\pi}{2}\rho^{-3}\right) d\rho =$$

$$= \left[+\frac{\sqrt{2}}{\rho} - \frac{\pi}{4\rho^2}\right]_{\rho=2}^{\rho=4} = +\sqrt{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{64}\pi$$

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $z^3 - 2e^{\frac{\pi}{3}i} = -1$; RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LE SOLUZIONI.



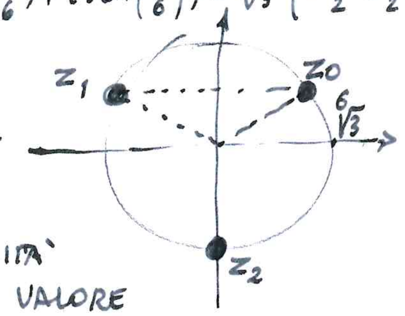
$e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; quindi la equazione da risolvere è: $z^3 - 1 - \sqrt{3}i = -1$ cioè $z^3 = \sqrt{3}\,i$.

Questa equivale a: $z^3 = \sqrt{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$, perciò le soluzioni sono:

$z = z_k = \sqrt[6]{3}\ e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3})}$, $k = 0,1,2$; precisamente:

$z_0 = \sqrt[6]{3}\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6})\right) = \sqrt[6]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$; $z_1 = \sqrt[6]{3}\left(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{6})\right) = \sqrt[6]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$;

$z_2 = \sqrt[6]{3}\left(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{2})\right) = -\sqrt[6]{3}\,i$



5) DETERMINARE $k \in \mathbb{R}$ IN MODO CHE LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ ABBIA L'AUTOVALORE -2 CON MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA PARI A 2. SCELTO QUESTO VALORE DI k, DETERMINARE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^3$ COMPOSTA DA AUTOVETTORI PER A

Il polinomio caratteristico di A è: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & k-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (\lambda^2 + 6\lambda + 9)(k - \lambda) - 1 - 1 + 3 + \lambda + 3 + \lambda - k + \lambda =$

$= k\lambda^2 + 6k\lambda + 9k - \lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 + 3\lambda - k = -\lambda^3 + (k-6)\lambda^2 + (6k-6)\lambda + 8k + 4$

Risulta $p(-2) = 8 + 4k - 24 - 12k + 12 + 8k + 4 = 0$ qualunque sia k, quindi $\lambda = -2$ è autovalore per A qualunque sia k. Affinché la molteplicità geometrica dell'autovalore -2 sia 2 occorre che rango$(A + 2I) = 1$. È:

$A + 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$ ha le prime due righe uguali; la terza è l'opposto delle prime due quando $k + 2 = -1$ cioè $k = -3$. Con questo valore di k, è $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; A ha l'autovalore -2 doppio e la traccia $= -9$; il terzo autovalore è λ_3 tale che $-2 - 2 + \lambda_3 = -9$, $\lambda_3 = -5$

L'autospazio relativo a $\lambda = -2$ (di dimensione 2) è descritto da $(A + 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè $\boxed{x + y - z = 0}$, formato dai vettori $(x, y, +x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Uno, per esempio, è $(1, 0, +1)$; un altro, ortogonale a questo, è $(x, y, +x+y)$ tale che $1\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot(+x+y) = 0 \to x + x + y = 0 \to y = -2x$ per esempio $x = 1$, $y = -2$, che dà $(1, -2, -1)$.

L'autospazio relativo a $\lambda = -5$ è il complemento ortogonale dell'autospazio relativo a $\lambda = -2$; quest'ultimo è il piano $x + y - z = 0$; il suo complemento ortogonale in $\mathbb{R}^3$ è generato da $(1, 1, -1)$, la terna dei coefficienti dell'equazione del piano. Una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A si ottiene prendendo i tre vettori che abbiamo appena calcolato, ciascuno diviso per la propria norma:

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right);\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$