1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{8x+4xy^2}{y}$; $y(1) = \sqrt{e-2}$

È una e.d. a variabili separabili, "$y' = f(x)\cdot g(y)$" con :

$f(x) = 4x$, $x \in I =]-\infty, +\infty[$; $g(y) = \frac{2+y^2}{y}$, $y \in J =]0, +\infty[$.

$\frac{dy}{dx} = 4x \cdot \frac{2+y^2}{y}$; $\int \frac{y}{2+y^2}\,dy = \int 4x\,dx$; $\frac{1}{2}\ln(2+y^2) = 2x^2 + C$ $(*)$

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=\sqrt{e-2}\end{matrix}\right\}$ in $(*)$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{\ln e}_{1} = 2+C$; $C = -\frac{3}{2}$ cosicché $(*)$ dà: $\frac{1}{2}\ln(2+y^2) = 2x^2 - \frac{3}{2}$,

$\ln(2+y^2) = 4x^2-3$, $2+y^2 = e^{4x^2-3}$, $y^2 = e^{4x^2-3} - 2$ e, tenendo presente che $y(1) = \sqrt{e-2} > 0$, $\boxed{y(x) = \sqrt{e^{4x^2-3} - 2}}$. Il dominio della soluzione si trova imponendo che sia $e^{4x^2-3} > 2$, $4x^2 > 3 + \ln 2$, $|x| > \frac{1}{2}\sqrt{3+\ln 2}$, e tenendo presente che il dominio della soluzione deve essere un INTERVALLO contenente $x_0 = 1$, si ottiene l'intervallo $I_0 =]\frac{1}{2}\sqrt{3+\ln 2}, +\infty[$.

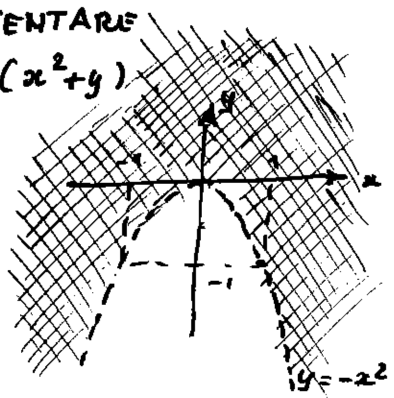
CH. IND. 21.02.2017

---

2) DETERMINARE E CLASSIFICARE I PUNTI CRITICI, e RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE IL DOMINIO DI: $f(x,y) = x + \frac{1}{2}y - 3\ln(x^2+y)$

Il dominio è $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y > 0\}$

(la regione tratteggiata nel disegno)



$f'_x = 1 - \frac{6x}{x^2+y} = 0$ ①

$f'_y = \frac{1}{2} - \frac{3}{x^2+y} = 0$ ②

② $\Rightarrow x^2+y = 6$ e allora

① $\Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$,

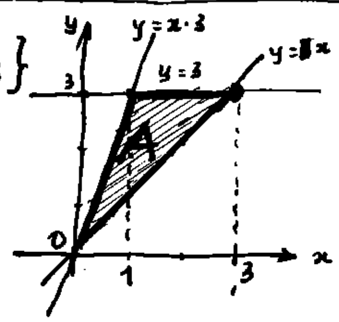
e allora ② $\Rightarrow 1+y = 6$, $y = 5$. C'è un solo punto critico, $P = (1,5)$, accettabile perché $\in D$. Adesso calcoliamo le derivate seconde per costruire la matrice Hessiana:

$f''_{xx} = \frac{6}{(x^2+y)^2}\cdot(-1\cdot(x^2+y) + 2x^2) = \frac{6(x^2-y)}{(x^2+y)^2}$; $f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{6x}{(x^2+y)^2}$; $f''_{yy} = \frac{3}{(x^2+y)^2}$;

allora $H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{6(x^2-y)}{(x^2+y)^2} & \frac{6x}{(x^2+y)^2} \\ \frac{6x}{(x^2+y)^2} & \frac{3}{(x^2+y)^2}\end{pmatrix}$; $H(1,5) = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/12\end{pmatrix}$ che ha det $= -\frac{1}{12} < 0$, perciò $P = (1,5)$ è un PUNTO DI SELLA per f.

---

3) CALCOLARE: $\iint_A y^4 e^{xy^2}\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \le y \le 3x;\ y \le 3\}$



$\iint_A y^4 e^{xy^2}\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_{\frac{1}{3}y}^{y} y^4 e^{xy^2}\,dx\right) dy = \int_0^3 \left[y^2 e^{xy^2}\right]_{x=\frac{1}{3}y}^{x=y} dy =$

$= \int_0^3 \left(y^2 e^{y^3} - y^2 e^{\frac{1}{3}y^3}\right) dy = \left[\frac{1}{3}e^{y^3} - e^{\frac{1}{3}y^3}\right]_{y=0}^{y=3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}e^{27} - e^9 + \frac{2}{3}}}$

---

4) Sia $x \in \mathbb{R}$, e sia $z \in \mathbb{C}$, $\boxed{z = (1+i)^{-2}\cdot e^{(5-i)x}}$. Esprimere in funzione di x : $|z|$; $\arg(z)$; $\operatorname{Re}(z)$; $\operatorname{Im}(z)$.

SOLUZIONE. Conviene esprimere z in forma esponenziale. È $1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$, quindi $(1+i)^{-2} = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$; poi $e^{(5-i)x} = e^{5x}\cdot e^{-ix}$. Allora:

$z = \frac{1}{2}e^{5x}\cdot e^{(-\frac{\pi}{2}-x)i}$, e da qui si deduce che: $|z| = \frac{1}{2}e^{5x}$;

$\arg(z) = -\frac{\pi}{2} - x$; $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}e^{5x}\cos(-\frac{\pi}{2}-x) = -\frac{1}{2}e^{5x}\operatorname{sen} x$;

$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}e^{5x}\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}-x) = -\frac{1}{2}e^{5x}\cos x$

---

5) SIA A la matrice: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$. CALCOLARE GLI AUTOVALORI DI A E UNA BASE PER CIASCUN AUTOSPAZIO; DIRE SE **A** È DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{R}$ OPPURE SU $\mathbb{C}$.

Il polinomio caratteristico di A è: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & -3-\lambda\end{pmatrix} =$

$= (3-\lambda)^2(-3-\lambda)$ che ha le radici $\lambda_1 = 3$ (doppia), $\lambda_2 = -3$ (semplice).

L'autospazio S_3 corrispondente all'autovalore doppio $\lambda_1 = 3$ è descritto da: $(A-3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, cioè: $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2 - 6z = 0\end{cases}$ che dà $x = z = 0$, lasciando y indeterminata; quindi $S_3 = \{(0,y,0);\ y \in \mathbb{R}\}$. Una base per S_3 è $\mathcal{B}_3 = \{(0,1,0)\}$. $\underline{\dim} S_3 = 1$, mentre l'autovalore $\lambda_1 = 3$ ha molteplicità algebrica 2. Perciò A NON è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, né su $\mathbb{C}$.

L'autospazio S_{-3} corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = -3$ è descritto da: $(A+3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, cioè: $\begin{cases} 6x = 0 \\ x + 6y + 2z = 0 \\ 2x = 0\end{cases}$ che dà $\begin{cases} x = 0 \\ z = -3y\end{cases}$; perciò $S_{-3} = \{(0,y,-3y);\ y \in \mathbb{R}\}$. $\underline{\dim} S_{-3} = 1$ (come dovuto); una base per S_{-3} è: $\mathcal{B}_{-3} = \{(0,1,-3)\}$.

VARIANTE ES. 4 . $x \in \mathbb{R}$; $z \in \mathbb{C}$, $z = (1-i)^{-2}\cdot e^{(3+i)x}$. ESPRIMERE IN FUNZIONE DI x: $|z|$, $\arg(z)$, $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$

SOLUZIONE. $1-i = \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$; $(1-i)^{-2} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$. Allora

$z = \frac{1}{2}e^{3x}\cdot e^{(\frac{\pi}{2}+x)i}$ da cui si ricava: $|z| = \frac{1}{2}e^{3x}$; $\arg z = \frac{\pi}{2} + x$;

$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}e^{3x}\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\frac{1}{2}e^{3x}\operatorname{sen} x$;

$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}e^{3x}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+x) = \frac{1}{2}e^{3x}\cos x$.