1) PROBLEMA DI CAUCHY: (1) $2y''+y'=6+10\,\mathrm{sen}\,x$, $y(0)=-2$, $y'(0)=0$.

E.D. omogenea associata: (2) $2y''+y'=0$; eq. caratteristica: (3) $2\lambda^2+\lambda=0$

Soluzioni di (3): $\lambda = \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$. SOLUZIONI DI (2): $C_1+C_2e^{-\frac{1}{2}x}$

Cerchiamo $z_1(x)$ soluzione di $2z_1''+z_1'=6$. $f_1(x)=6$ è "(4)" con $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$
quindi c'è una soluzione della forma $z_1(x)=A\cdot x$, da cui:
$z_1'=A$, $z_1''=0$ e $2z_1''+z_1'=A$, desiderato $=6$ cosicché $A=6$ e $z_1(x)=6x$.

Cerchiamo $z_2(x)$ soluzione di $2z_2''+z_2=10\,\mathrm{sen}\,x$. $f_2(x)=10\,\mathrm{sen}\,x$ è "(4)" con
$\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$. quindi c'è una soluzione della forma: $z_2(x)=A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x$
da cui: $z_2'=-A\,\mathrm{sen}\,x+B\cos x$, $z''=-A\cos x-B\,\mathrm{sen}\,x$, e allora:

$$\left.\begin{array}{l} 2z_2'' \\ +z_2' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} -2A\cos x & -2B\,\mathrm{sen}\,x \\ +B\cos x & -A\,\mathrm{sen}\,x \end{array}\right.$$

$=(-2A+B)\cos x+(-A-2B)\,\mathrm{sen}\,x$ desiderato $=10\,\mathrm{sen}\,x$; quindi:

$$\begin{cases} -2A+B=0 \\ -A-2B=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=2A \\ -5A=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=-4 \\ A=-2 \end{cases}$$ e $z_2(x)=-2\cos x-4\,\mathrm{sen}\,x$

La soluzione generale di (1) è: $y(x)=\underbrace{6x}_{z_1}\underbrace{-2\cos x-4\,\mathrm{sen}\,x}_{z_2}+\underbrace{C_1+C_2e^{-\frac{1}{2}x}}_{\text{sol. (2)}}$,

quindi $y'=6+2\,\mathrm{sen}\,x-4\cos x-\frac{1}{2}C_2e^{-\frac{1}{2}x}$. Allora $y(0)=-2+C_1+C_2$,
$y'(0)=2-\frac{1}{2}C_2$. Imponiamo le condizioni iniziali $y(0)=2$, $y'(0)=0$:

$$\begin{cases} -2+C_1+C_2=-2 \\ 2-\frac{1}{2}C_2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1=-4 \\ C_2=4 \end{cases}$$ quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$y(x)=6x-2\cos x-4\,\mathrm{sen}\,x-4+4e^{-\frac{1}{2}x}$, $x\in\,]-\infty,+\infty[$.

---

2) DETERMINARE E CLASSIFICARE I PUNTI CRITICI PER $f(x,y)=x^2e^{-2x+y^2}$

$$\begin{cases} f_x'=(2x-2x^2)e^{-2x+y^2}=0 & (\mathrm{I}) \\ f_y'=2x^2y\,e^{-2x+y^2}=0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

(I) $\rightarrow x=0 \vee x=1$
Se $x=0$, (II) dà una identità. Quindi ogni punto della forma $(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$ è punto critico per f.
Se $x=1$, (II) $\rightarrow y=0$; $(1,0)$ è punto critico per f.
La matrice Hessiana di f è:

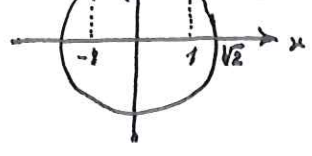
$$H(x,y)=\begin{pmatrix} (2-4x-4x+4x^2)e^{-2x+y^2} & 2y(2x-2x^2)e^{-2x+y^2} \\ (4xy-4x^2y)e^{-2x+y^2} & (2x^2+4x^2y^2)e^{-2x+y^2} \end{pmatrix}$$

$H(1,0)=\begin{pmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$ che ha determinante $-4e^{-4}<0$,
quindi $(1,0)$ è PUNTO DI SELLA per f.

$H(0,y)=\begin{pmatrix} 2e^{y^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha determinante $=0$, quindi non riesce a stabilire la natura dei punti critici $(0,y)$. Tuttavia si nota che $f(0,y)=0$ e che $f(x,y)\geq 0$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, quindi i punti $(0,y)$ sono punti di MINIMO ASSOLUTO per f.

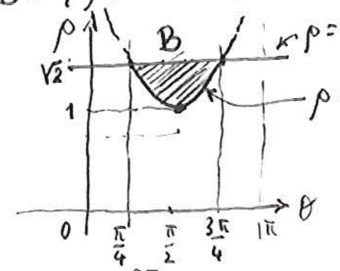
---

3) CALCOLARE L'INTEGRALE DOPPIO: $\iint_A \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, dove
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq 2;\ y\geq 1\}$



CH. IND. 21.04.2017

Conviene applicare il cambiamento di variabili: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\end{cases}$. L'insieme $B=\{(\rho,\theta)\in[0,+\infty[\times[0,2\pi[\,;\,(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\in A\}$ è: $B=\{(\rho,\theta);\ \theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}];\ \rho\in[\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta},\sqrt{2}]\}$



$$\iint_A \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_B \frac{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta}{\cancel{\rho^2}}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int_{\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}}^{\sqrt{2}} \rho\cos^2\theta\,d\rho\right)d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2}\Big[\rho^2\cos^2\theta\Big]_{\rho=\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}}^{\rho=\sqrt{2}}\,d\theta =$$

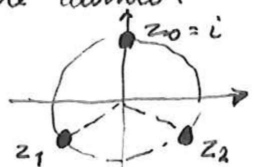
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{2}\cot^2\theta\right)d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))+\frac{1}{2}\Big(\underbrace{-1-\cot^2\theta}_{\text{DERIVATA DI }\cot\theta}+1\Big)\right)d\theta =$$

$$= \Big[\theta+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta)+\frac{1}{2}\cot\theta\Big]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}$$

---

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $\bar{z}^2 z^5=-i$; RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LE SOLUZIONI.

Posto $z=\rho e^{i\theta}$, abbiamo $\rho^2 e^{-2i\theta}\cdot\rho^5 e^{5i\theta}=-i\ (=e^{\frac{3\pi}{2}i})$, cioè $\rho^7 e^{3i\theta}=e^{\frac{3}{2}\pi i}$. Uguagliando i moduli si ha $\rho^7=1$ quindi $\rho=1$; allora $e^{3i\theta}=e^{\frac{3}{2}\pi i}$, quindi $3\theta=\frac{3}{2}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, $\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}k\pi$; si hanno numeri complessi diversi solo per tre valori consecutivi di k, per esempio $k=0,1,2$, che danno:
$\theta=\frac{\pi}{2}$, quindi $z_0=i$; $\theta=\frac{7}{6}\pi$, quindi $z_1=-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i$,
$\theta=\frac{11}{6}\pi$, quindi $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$



---

5) SIANO $A=\begin{pmatrix}-2&k&2\\k&1&4\\2&4&1\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$. DETERMINARE k IN MODO CHE x SIA AUTOVETTORE PER A. ASSEGNATO A k QUESTO VALORE, DIAGONALIZZARE A CON UNA MATRICE DI PASSAGGIO ORTOGONALE M DI DETERMINANTE 1 (cioè la matrice di una rotazione)

$A\cdot x=\begin{pmatrix}4k-14\\2k-16\\15\end{pmatrix}$ desiderato $=\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$. La 3ª componente mostra che $\lambda=-3$; per avere $4k-14=-3\cdot2$ e $2k-16=-3\cdot4$ bisogna che sia $\underline{k=2}$. Allora $A=\begin{pmatrix}-2&2&2\\2&1&4\\2&4&1\end{pmatrix}$
Il calcolo degli autovalori di A dà l'autovalore -3 (già noto) con molteplicità algebrica 2, e l'autovalore semplice 6. L'autospazio S_{-3} relativo a $\lambda=-3$ è descritto da: $\begin{cases}x+2y+2z=0\\2x+4y+4z=0\\2x+4y+4z=0\end{cases}$ cioè $x=-2y-2z,\ y,z\in\mathbb{R}$.
un vettore $u\in S_{-3}$ è per esempio $u=(-2,0,1)$; poi, $v=(-2y-2z,y,z)\in S_{-3}$ è ortogonale a u se $4y+4z+z=0$, $4y+5z=0$, $y=-\frac{5}{4}z$; per esempio $v=(2,-5,4)$. L'autospazio S_6 relativo a $\lambda=6$ è il complemento ortogonale di S_{-3}, quindi è caratterizzato (anche) da: $\begin{cases}-2x+z=0\\2x-5y+4z=0\end{cases}$; una base per S_6 è per esempio $\mathcal{B}_6=\{(1,2,2)\}$. Una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A è $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\0\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2/(3\sqrt{5})\\-5/(3\sqrt{5})\\4/3\sqrt{5}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}\right\}$; la matrice $M=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\0&\frac{-5}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ ha il determinante uguale a 1 ed è ortogonale, quindi soddisfa i requisiti; cioè, il calcolo $M^T\cdot A\cdot M$ dà come risultato $\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.