1) PROBLEMA DI CAUCHY: $5y''-2y'+y=8e^{-\frac{x}{5}}$ ① ; $y(0)=6$, $y'(0)=2$

E.D. omogenea associata a ①: ② $5y''-2y'+y=0$

Equaz. caratteristica di ②: ③ $5\lambda^2-2\lambda+1=0$ da cui $\lambda=\frac{1}{5}\pm\frac{2}{5}i$

Soluzione generale di ②: $e^{\frac{1}{5}x}\left(C_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)\right)$

Adesso cerchiamo $z(x)$ soluzione di ①. $f(x)=8e^{-\frac{x}{5}}$ e' "④" con

m	α	β	k
0	$-\frac{1}{5}$	0	0

quindi c'e' una soluzione $z(x)$ di ① della forma:

$z(x)=A\cdot e^{-x/5}$, da cui $z'(x)=-\frac{1}{5}Ae^{-x/5}$, $z''(x)=\frac{1}{25}Ae^{-x/5}$;

$5z''-2z'+z=e^{-x/5}\left(\frac{1}{5}A+\frac{2}{5}A+A\right)=\frac{8}{5}Ae^{-x/5}$, desiderato $=8e^{-x/5}$;

si ricava $A=5$, cioe' $z(x)=5e^{-x/5}$. La soluzione generale di ① e':

$y(x)=5e^{-x/5}+e^{x/5}\left(C_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)\right)$; percio' e':

$y'(x)=-e^{-x/5}+e^{x/5}\left(\frac{1}{5}C_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+\frac{1}{5}C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)-\frac{2}{5}C_1\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)+\frac{2}{5}C_2\cos\left(\frac{2}{5}x\right)\right)$

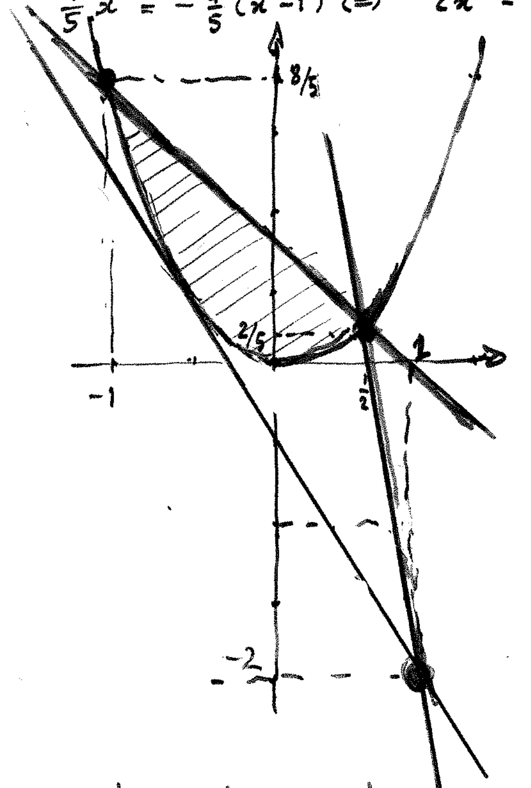
$$\begin{cases} y(0)=5+C_1=6 & \to C_1=1 \\ y'(0)=-1+\frac{1}{5}C_1+\frac{2}{5}C_2=2 & \to -\frac{4}{5}+\frac{2}{5}C_2=2\ ;\ C_2=7\end{cases}$$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: $y(x)=5e^{-x/5}+e^{x/5}\left(\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+7\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)\right)$

---

2) MINIMO, MASSIMO DI $f(x,y)=\frac{x+y+1}{x-1}$ IN $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \frac{8}{5}x^2\le y\le-\frac{4}{5}(x-1)\}$

$\frac{8}{5}x^2=-\frac{4}{5}(x-1)\iff 2x^2=-x+1\iff 2x^2+x-1=0\iff\left(x=-1\vee x=\frac{1}{2}\right)$



Le linee di livello di f sono

$L_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\ne1,\ \frac{x+y+1}{x-1}=k\}$; L_k e' la retta di equazione $x+y+1-k(x-1)=0$, privata del punto $(1,-2)=C$ (Centro del fascio di rette L_k)

Le rette ruotano in senso orario al crescere di k, quindi L_{min} passa per $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$;

$\to \min\{f(x,y),(x,y)\in A\}=f\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)=-\frac{19}{5}$.

L_{max} e' tangente alla parabola $y=\frac{8}{5}x^2$ in un punto del 2° quadrante.

$$\begin{cases} y=\frac{8}{5}x^2 \\ x+y+1-k(x-1)=0\end{cases} \to \frac{8}{5}x^2+(1-k)x+1+k=0 \to 8x^2+5(1-k)x+5+5k=0$$

$\Delta=25+25k^2-50k-160-160k$
$=5(5k^2-42k-27)$; $\Delta=0\iff k=-\frac{3}{5}\vee k=9$

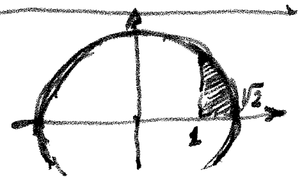
Il valore di k corrispondente alla tangente che c'interessa e' $k=-\frac{3}{5}$.

Il minimo e il massimo valore assunto da f in A sono: $-\frac{19}{5}$ e $-\frac{3}{5}$.

CH. IND. 12 GIUGNO 2017

---

3) $\iint_A\frac{2y}{(6x-x^3)^2}\,dxdy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le2;\ y\ge0,\ x\ge1\}$



$\iint_A\frac{2y}{(6x-x^3)^2}\,dxdy=\int_1^{\sqrt2}\left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\frac{2y}{(6x-x^3)^2}\,dy\right)dx=\int_1^{\sqrt2}\left[\frac{y^2}{(6x-x^3)^2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{2-x^2}}dx=$

$=\int_1^{\sqrt2}\frac{2-x^2}{(6x-x^3)^2}\,dx=\frac{1}{3}\int_1^{\sqrt2}\frac{6-3x^2}{(6x-x^3)^2}\,dx=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{-1}{6x-x^3}\right]_{x=1}^{x=\sqrt2}=$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{6\sqrt2-2\sqrt2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4\sqrt2}\right)$ (per il calcolo della primitiva, si noti che $6-3x^2$ e' la derivata di $6x-x^3$)

---

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $(1-i)z^2-(7-i)z+8+6i=0$ (*)

moltiplicando tutto per $1+i$: (*) $\iff 2z^2-(8+6i)z+2+14i=0$ da cui

$z=\frac{1}{2}\left(4+3i\pm\sqrt{7+24i-4-28i}\right)=\frac{1}{2}\left(4+3i\pm\sqrt{3-4i}\right)$

Ora servono le due radici quadrate di $3-4i$ in $\mathbb{C}$. $|3-4i|=5$; un argomento di $3-4i$ e' θ con: $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\mathrm{sen}\theta=-\frac{4}{5}$; $\theta\in\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$. Le radici quadrate di $3-4i$ in $\mathbb{C}$ sono: $\pm\sqrt5\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$, ora e': $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)=\frac{4}{5}$; $\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)=\frac{1}{5}$, e siccome anche $\frac{\theta}{2}\in\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right[$ $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=-\frac{2}{\sqrt5}$, $\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt5}$, e le radici quadrate di $3-4i$ sono: $\pm(-2+i)$; le soluzioni di (*) sono allora:

$$z=\frac{1}{2}\left(4+3i\pm(-2+i)\right)= \begin{cases}\frac{1}{2}(4+3i-2+i)=1+2i\\ \frac{1}{2}(4+3i+2-i)=3+i\end{cases}$$

---

5) CALCOLARE UNA BASE DELL'AUTOSPAZIO S_3 DELLA MATRICE $A=\begin{pmatrix}4&4&3&7\\4&6&-1&2\\3&-1&-1&-5\\7&2&-5&0\end{pmatrix}$ RELATIVO ALL'AUTOVALORE 3. POI, DIRE SE A E' DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{R}$ O SU $\mathbb{C}$, GIUSTIFICANDO LA RISPOSTA.

Autospazio: $A-3I=\begin{pmatrix}1&4&3&7\\4&3&-1&2\\3&-1&-4&-5\\7&2&-5&-3\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&4&3&7\\0&-13&-13&-26\\0&-13&-13&-26\\0&-26&-26&-52\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\R2-4R1\\R3-3R1\\R4-7R1\end{array}$

$\to\begin{pmatrix}1&4&3&7\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\R2\times(-\frac{1}{13})\\R3-R2\\R4-2R2\end{array}$ Quindi il sistema $(A-3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ equivale a:

$$\begin{cases}x+4y+3z+7t=0\\ y+z+2t=0\end{cases}\quad\text{cioe'}\quad\begin{cases}x=z+t\\ y=-z-2t\end{cases}$$

Gli autovettori sono: $(x,y,z,t)=(z+t;\ -z-2t;\ z,\ t)\quad\forall z,t\in\mathbb{R}$

Una base dell'autospazio S_3 e' $\mathcal{B}=\{\underset{\text{con } z=1,\ t=0}{(1,-1,1,0)};\ \underset{\text{con } z=0,\ t=1}{(1,-2,0,1)}\}$

A e' diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (quindi anche su $\mathbb{C}$) perche' e' reale simmetrica.