1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{-xy}{4-x^2} + 6x$ ; $y(\sqrt{5}) = 3$

E.D. lineare di ordine 1, "$y' = ay + b$" con $a(x) = \frac{-x}{4-x^2}$, $b(x) = 6x$, $x \in I = ]2, +\infty[$ (deve contenere $\sqrt{5}$, non può contenere 2 e $-2$)

$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{-x}{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-4)$ ($|4-x^2| = x^2-4$ se $x > 2$)

$y(x) = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2-4)}\left(C + \int 6x \cdot e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2-4)}\,dx\right) = \sqrt{x^2-4}\left(C + \int 6x\cdot(x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\,dx\right) =$

$= \sqrt{x^2-4}\left(C + 3\cdot 2(x^2-4)^{\frac{1}{2}}\right) = C\sqrt{x^2-4} + 6(x^2-4)$.

$y(\sqrt{5}) = C + 6$ desiderato $= 3$; quindi $C = -3$.

La soluzione del problema di Cauchy è:

$y(x) = -3\sqrt{x^2-4} + 6(x^2-4)$, $x \in ]2, +\infty[$

---

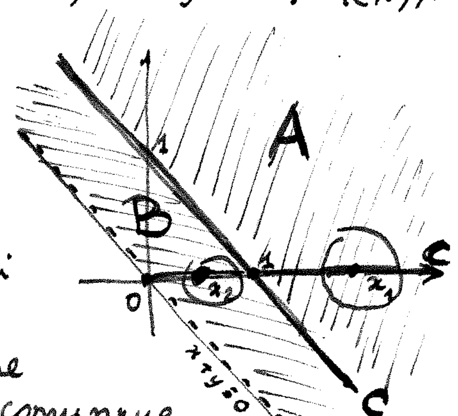
2) $f(x,y) = y^2 \ln(x+y)$. a) disegnare $D$ = dominio naturale di $f$, e i sottoinsiemi $A, B, C$ di $D$ in cui $f(x,y)$ è $>0$, $<0$, $=0$.

b) determinare e classificare i punti critici per $f$

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x+y > 0\}$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y > 1\}$;

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x+y < 1\}$; $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x+y = 1\} \cup \{(x,0); x > 0\}$

b) $\begin{cases} f'_x = \frac{y^2}{x+y} = 0 & ① \\ f'_y = 2y\ln(x+y) + \frac{y^2}{x+y} = 0 & ② \end{cases}$

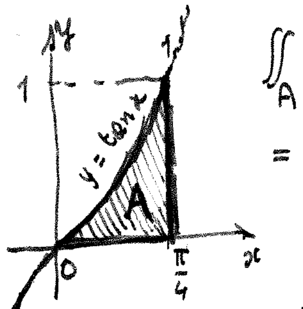



CH. IND. 06.07.2017

① è verificata $\Leftrightarrow$ $y = 0$ (e $x > 0$);
se $y = 0$ ② dà un'identità; quindi i punti critici per $f$ sono tutti e soli i punti $(x, 0)$ con $x > 0$. Per la classificazione non occorre calcolare la matrice Hessiana, che sarebbe comunque inefficace, perché nei punti $(x,0)$ ha determinante 0.
Se $(x_1, 0)$ è un punto critico con $x_1 > 1$, allora un intorno di $(x_1, 0)$ è contenuto in $A \cup C$, dove $f(x,y) \geq 0$, mentre $f(x_1, 0) = 0$; quindi $(x_1, 0)$ è punto di MINIMO RELATIVO per $f$.
Analogamente, se $0 < x_2 < 1$ allora c'è un intorno di $(x_2, 0)$ contenuto in $B \cup C$, dove $f(x,y) \leq 0$, mentre $f(x_2, 0) = 0$, quindi $(x_2, 0)$ è punto di MASSIMO RELATIVO per $f$. Infine, ogni intorno di $(1,0)$, in cui $f$ vale 0, contiene sia punti di $A$, sia punti di $B$, quindi $(1,0)$ è PUNTO DI SELLA.

---

3) CALCOLARE $\iint_A \frac{e^x}{1+y^2}\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq y \leq \tan x\}$




$\iint_A \frac{e^x}{1+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\tan x} \frac{e^x}{1+y^2}\,dy\right)dx = \int_0^{\pi/4} \left[e^x \arctan y\right]_{y=0}^{y=\tan x} dx =$

$= \int_0^{\pi/4} e^x \cdot x\,dx$ (e ora per parti) $= \left[e^x \cdot x\right]_{x=0}^{x=\pi/4} - \int_0^{\pi/4} e^x \cdot 1\,dx =$

$= \left[(x-1)e^x\right]_{x=0}^{x=\pi/4} = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)e^{\pi/4} + 1$

---

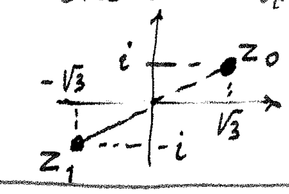
4) Dato il numero complesso $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, determinare tutti i numeri complessi $z$ di modulo 2 tali che $w\bar{z} = z$. →

Rappresentare graficamente tali numeri $z$ nel piano complesso.

---

Un numero complesso $z$ di modulo 2 si può scrivere $z = 2e^{i\theta}$, per un $\theta \in [0, 2\pi[$. Allora $\bar{z} = 2e^{-i\theta}$. Inoltre si vede facilmente che $w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i = e^{\frac{\pi}{3}i}$. Allora la relazione desiderata si scrive: $e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot 2e^{-i\theta} = 2e^{i\theta}$, da cui $e^{2i\theta} = e^{\frac{\pi}{3}i}$. Questa è soddisfatta se $2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ossia $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$; questo $\theta$ sta tra 0 e $2\pi$ solo se $k = 0$ v $k = 1$; quindi ci sono due $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano quanto richiesto, e sono: $z_0 = 2e^{(\pi/6)i} = \sqrt{3} + i$;

$z_1 = 2e^{\frac{7}{6}\pi i} = -\sqrt{3} - i = -z_0$.




---

5) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ composta da autovettori per la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonalizzare $A$ con una matrice di passaggio ortogonale di determinante 1, cioè la matrice di una rotazione. Stabilire qual è l'angolo di rotazione e descrivere geometricamente l'endomorfismo $f$ definito da $A$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

---

Gli autovalori di $A$ sono 0 e 4; infatti il loro prodotto è 0 (determinante di $A$) e la loro somma è 4 (traccia di $A$). Gli autovettori relativi a $\lambda = 0$ sono le soluzioni di $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$, cioè $(x, -x)$, con $x \in \mathbb{R}$; una base normalizzata per l'autospazio è $\mathcal{B}_0 = \left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$. Siccome $A$ è simmetrica, l'autospazio relativo a $\lambda = 4$ è ortogonale all'altro autospazio, perciò una sua base normalizzata è $\mathcal{B}_4 = \left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$. Una matrice ortogonale che diagonalizza $A$ è $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; risulta cioè $P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Siccome $\det A = 1$, $P$ è la matrice di una rotazione di angolo $\alpha$ tale che $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi (a meno di multipli di $2\pi$), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (da coordinate "nuove" a "vecchie"), $-\frac{\pi}{4}$ da "vecchie" a "nuove".
Tenendo conto di autovalori e autospazi, $f$ agisce su un vettore $v \in \mathbb{R}^2$ mutandolo nel quadruplo del suo componente rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\underline{a}_0, \underline{a}_4\} = \left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$, relativo al vettore $\underline{a}_4$, cioè, se $v = \alpha\,\underline{a}_0 + \beta\,\underline{a}_4$, allora $f(v) = 4\beta\,\underline{a}_4$, ossia $f(v)$ è il quadruplo della proiezione ortogonale di $v$ su $S_4$, autospazio relativo all'autovalore 4.