1) PROBLEMA DI CAUCHY: ① $4y'' + y' = 3x^2 + 8x$; $y(0) = 100$; $y'(0) = 44$

E.D. omogenea associata : ② $4y'' + y' = 0$

Eq. caratteristica di ② : ③ $4\lambda^2 + \lambda = 0 \to \lambda = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{matrix} \right.$

Soluzioni di ②: $\underline{C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{4}x}}$. Ora cerchiamo una soluzione di ①.

$f(x) = 3x^2 + 8x$ è "del tipo ⑥" con $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$ ($k = 1$ perché $0 + 0i$, cioè 0, è soluzione di ③ di molteplicità 1). Allora c'è una soluzione di ① della forma:

⑤' $z(x) = x^{\underset{k}{1}} \cdot (ax^2 + bx + c) \cdot e^{\underset{\alpha}{0}x} = ax^3 + bx^2 + cx$; quindi

$z'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $z''(x) = 6ax + 2b$, e allora

$$\left.\begin{matrix} 4y'' \\ +y' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 24ax + 8b \\ +3ax^2 + 2bx + c \end{matrix}\right. = 3ax^2 + (24a + 2b)x + 8b + c \to \text{desiderato} = 3x^2 + 8x.$$

Allora deve essere:

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 24a + 2b = 8 \\ 8b + c = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 64 \end{cases}; \quad z(x) = x^3 - 8x^2 + 64x.$$

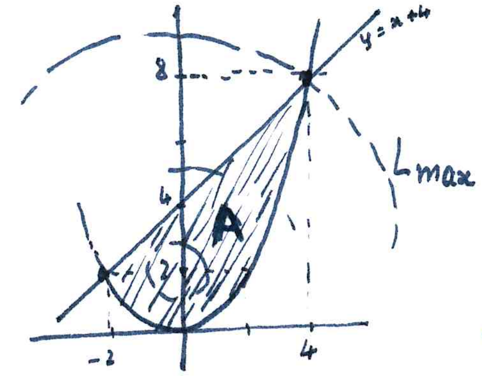
SOLUZIONE GENERALE DI ①: $y(x) = x^3 - 8x^2 + 64x + C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{4}x}$; $y'(x) = 3x^2 - 16x + 64 - \frac{1}{4}C_2 e^{-\frac{1}{4}x}$

$y(0) = C_1 + C_2$; $y'(0) = 64 - \frac{1}{4}C_2$. Allora si vuole che: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 100 \\ 64 - \frac{1}{4}C_2 = 44 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = 20 \\ C_2 = 80 \end{cases}$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: $y(x) = x^3 - 8x^2 + 64x + 20 + 80e^{-\frac{1}{4}x}$; $x \in]-\infty, +\infty[$.

---

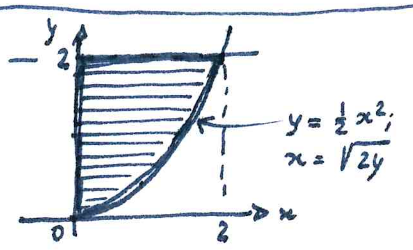
2) MINIMO, MASSIMO DI $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ IN $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \leq 2y \leq 2x + 8\}$



Le linee di livello di f sono: $L_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 - 2y = k\}$.
Sono circonferenze con centro $(0,1)$ e raggio $\sqrt{1+k}$ (per $k \geq -1$), $L_k = \emptyset$ se $k < -1$.
La linea di livello minimo con intersezione non vuota con A è la "circonferenza degenere" $L_{-1} = \{(0,1)\}$, contenente il solo punto $(0,1)$ in cui f assume il valore minimo assoluto, $\underline{f(0,1) = -1}$
La linea di livello massimo con intersezione non vuota con A passa per il punto $(4,8)$, quindi $k = 16 + 64 - 16 = 64$, e quindi il massimo valore assunto da $f(x,y)$ in A è $f(4,8) = 64$.

---

3) $* \iint_A x e^{y^2} dx dy$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - 2y \leq 0;\ x \geq 0;\ y \leq 2\}$



$$* = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2y}} x e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 e^{y^2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{2y}} dx =$$

$$= \int_0^2 y e^{y^2} dy = \frac{1}{2} \left[e^{y^2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

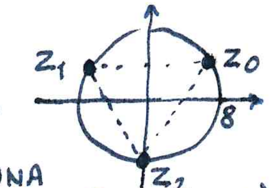
---

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $z^3 = (-\sqrt{3} - i)^9$; scrivere le soluzioni in forma algebrica e esponenziale, e rappresentarle graficamente.

Chiamato $w = -\sqrt{3} - i$, si ha $|w| = \sqrt{3+1} = 2$; $\arg w = \pi + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{7}{6}\pi$;
quindi $w = 2e^{\frac{7}{6}\pi i}$, e $w^9 = 2^9 \cdot e^{\frac{63}{6}\pi i} = 2^9 \cdot e^{(10\pi + \frac{\pi}{2})i} = 2^9 e^{\frac{\pi}{2}i}$ $(= 2^9 \cdot i)$
Le (tre) soluzioni di "$z^3 = 2^9 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$" sono, per $k = 0, 1, 2$:

$z_k = 2^3 \cdot e^{(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3})i}$; quindi : $z_0 = 2^3 e^{\frac{\pi}{6}i} = 4\sqrt{3} + 4i$;

$z_1 = 2^3 e^{\frac{5\pi}{6}i} = -4\sqrt{3} + 4i$; $z_2 = 2^3 e^{\frac{3\pi}{2}i} = -8i$



---

5) $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$. CALCOLARE AUTOVALORI DI A E UNA MATRICE ORTOGONALE M TALE CHE $M^T \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ CON DET M > 0. QUAL È L'ANGOLO DELLA ROTAZIONE DEFINITA DALLA MATRICE M?

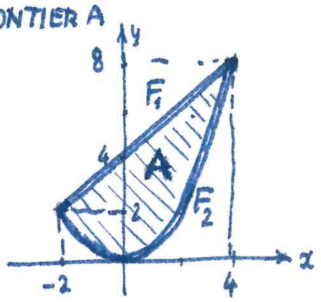
Polinomio caratteristico di A. $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \frac{13}{4} - \lambda, & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}, & \frac{7}{4} - \lambda \end{pmatrix} =$
$= \lambda^2 - 5\lambda + 4$; $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \right.$ (autovalori di A)

Autovettori corrispondenti a $\lambda = 1$: soluzioni di $(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cioè:

$\begin{cases} \frac{9}{4}x - \frac{3}{4}\sqrt{3}\,y = 0 \\ -\frac{3}{4}\sqrt{3}\,x + \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$ che dà $y = \sqrt{3}\,x$; l'autospazio ha (ovviamente) dimensione 1, e una sua base normalizzata è $\left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\right\}$.

Siccome A è simmetrica, l'autospazio relativo a $\lambda = 4$ è il complemento ortogonale del precedente, quindi una base normalizzata di tale autospazio è $\left\{\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\}$. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ che ha come colonne questi autovettori normalizzati, diagonalizza A. M è ortogonale, cioè $M^T = M^{-1}$; risulta $M^T \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; gli autovettori si presentano sulla diagonale nell'ordine in cui gli autovettori si trovano come colonne di M.
Siccome $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha = \frac{\pi}{3}$, M rappresenta nel piano una rotazione di un angolo di $\frac{\pi}{3}$.

RISOLUZIONE ES. 2 CON DIVERSO METODO: PUNTI CRITICI INTERNI E FRONTIERA



Punti critici per f: soluzioni di $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \to (x,y) = (0,1) \underline{\in A}$

Frontiera di $A = F_1 \cup F_2$, con
$F_1 = \{(x,y);\ y = x + 4;\ -2 \leq x \leq 4\}$
$F_2 = \{(x,y);\ y = \frac{1}{2}x^2;\ -2 \leq x \leq 4\}$.

Se $(x,y) \in F_1$ allora $x = y - 4$, quindi
$f(x,y) = y^2 - 8y + 16 + y^2 - 2y = 2y^2 - 10y + 16 \equiv g_1(y)$
con $2 \leq y \leq 8$. Si calcola $g_1(2) = 4$, $g_1(8) = 64$ (*)

Se $(x,y) \in F_2$ allora $y = \frac{1}{2}x^2$, $x^2 = 2y$ e allora:
$f(x,y) = 2y + y^2 - 2y = y^2 \equiv g_2(y)$, con $0 \leq y \leq 8$
$g_2'(y) = 2y$ vale 0 se $y = 0$; $g_2(0) = 0$
$g_2(8) = 64$ $(= g_1(8) = f(4,8))$

(*) Inoltre, $g_1'(y) = 4y - 10$; $g_1'(y) = 0$ se $y = \frac{5}{2}$;
$g_1\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2} - 25 + 16 = \frac{7}{2}$

LISTA VALORI INTERESSANTI DI f
$f(0,1) = -1$
$g_1(2) = f(-2,2) = 4$
$g_1(8) = f(4,8) = 64$
$g_2(0) = f(0,0) = 0$
$g_2(8) = f(4,8) = 64$
$g_1\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}$

Confrontando i valori ottenuti si conclude che il minimo e il massimo sono rispettivamente $f(0,1) = -1$, $f(4,8) = 64$.