1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{6xy}{x^2-4} + 8x;\ y(\sqrt3) = 5$

E.D. lineare di ordine 1 "$y' = ay + b$" con: $a(x) = \frac{6x}{x^2-4}$, $x \in I =]-2,2[$; $b(x) = 8x$

$A(x) = \int a(x)dx = \int \frac{6x}{x^2-4}dx = 3\ln|x^2-4| = 3\ln(4-x^2)$ perché $x \in]-2,2[$.

$y(x) = e^{A(x)}\left(C + \int b(x)e^{-A(x)}dx\right) = e^{3\ln(4-x^2)}\left(C + \int 8x\cdot e^{-3\ln(4-x^2)}dx\right) =$

$= (4-x^2)^3\left(C + \int 8x\cdot(4-x^2)^{-3}dx\right) = (4-x^2)^3\left(C + 4\frac{(4-x^2)^{-2}}{-2}\right) =$

$= (4-x^2)^3\left(C + \frac{2}{(4-x^2)^2}\right)$. Ora calcoliamo C in modo che $y(\sqrt3) = 5$.

$y(\sqrt3) = C + 2$ desiderato $= 5 \Rightarrow C = 3$. La soluzione del problema di Cauchy è:

$y(x) = (4-x^2)^3\left(3 + \frac{2}{(4-x^2)^2}\right) = 3(4-x^2)^3 + 2(4-x^2)$, $x \in]-2,2[$.

---

2) DETERMINARE E CLASSIFICARE I PUNTI CRITICI DI $f(x,y) = y^2\ln(x^2+y)$, E DISEGNARE IL DOMINIO NATURALE DI f.

Dominio di f: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y > 0\}$

$$\begin{cases} f'_x = \frac{2xy^2}{x^2+y} = 0 & (1) \\ f'_y = 2y\ln(x^2+y) + \frac{y^2}{x^2+y} = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\rightarrow x = 0 \vee y = 0$

SE $y = 0$ (2) diventa un'identità. Tutti i punti $(x,0) \in D$ (cioè, con $x \neq 0$) sono punti critici per f; in questi punti $f(x,0) = 0$. SE $x = 0$, (2) $\rightarrow 2y\ln y + y = 0 \rightarrow y(2\ln y + 1) = 0$. $y = 0$ darebbe il punto $(0,0) \notin D$. $2\ln y + 1 = 0 \rightarrow \ln y = -\frac12 \rightarrow y = e^{-1/2}$. E' punto critico $A = (0, e^{-1/2})$. Ora calcoliamo la matrice hessiana.

$f''_{xx} = \frac{1}{(x^2+y)^2}\left(2y^2(x^2+y) - 4x^2y^2\right) = \frac{2y^3 - 2x^2y^2}{(x^2+y)^2}$

$f''_{xy} = \frac{1}{(x^2+y)^2}\left(4xy(x^2+y) - 2xy^2\right) = \frac{4x^3y + 2xy^2}{(x^2+y)^2}$ $\qquad f''_{yx} = f''_{xy}$;

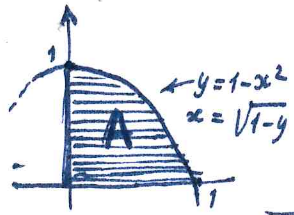
$f''_{yy} = 2\ln(x^2+y) + \frac{2y}{x^2+y} + \frac{1}{(x^2+y)^2}\left(2y(x^2+y) - y^2\right) = \frac{y(4x^2+3y)}{(x^2+y)^2} + 2\ln(x^2+y)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y^3-2x^2y^2}{(x^2-y)^2} & \frac{4x^3y+2xy^2}{(x^2+y)^2} \\ \frac{4x^3y+2xy^2}{(x^2+y)^2} & \frac{y(4x^2+3y)}{(x^2+y)^2} + 2\ln(x^2+y) \end{pmatrix};\quad H(0,e^{-\frac12}) = \begin{pmatrix} 2e^{-1/2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Quest'ultima ha due autovalori positivi ($2e^{-1/2}$ e 2), quindi $(0, e^{-\frac12})$ è punto di MINIMO RELATIVO per f. Nei punti $(x,0)$ è $\det H = 0$, quindi la matrice hessiana non serve per la classificazione. E' $f(x,0) = 0$. Se $|x_0| > 1$, cioè $x_0 > 1 \vee x_0 < 1$, allora $\ln(x_0^2 + 0) > 0$, e $\ln(x^2+y) > 0$ in un intorno di $(x_0,0)$; quindi $f(x,y) \geq 0 = f(x_0,0)$ in un intorno di $(x_0,0)$; questo punto è allora punto di MINIMO RELATIVO per f. Analogamente, se $0 < |x_1| < 1$ allora in un intorno di $(x_1,0)$ è $\ln(x^2+y) < 0$, quindi $(x_1,0)$ è PUNTO DI MASSIMO RELATIVO per f. Infine, in ogni intorno di $(1,0)$ e di $(-1,0)$ ci sono punti in cui $f(x,y) > 0$ e punti in cui $f(x,y) < 0$. $(1,0)$ e $(0,1)$ sono PUNTI DI SELLA per f

CH. IND. 14 FEBBRAIO 2018

3) INTEGRALE DOPPIO: $\iint_A \frac{x}{2-2y+y^2}dxdy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0;\ 0 \leq y \leq 1-x^2\}$



$\iint_A \frac{x}{2-2y+y^2}dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y}} \frac{x}{2-2y+y^2}dx\right)dy = \int_0^1 \frac12\left[\frac{x^2}{2-2y+y^2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y}}dy =$

$= \frac12\int_0^1 \frac{1-y}{2-2y+y^2}dy = -\frac14\left[\ln|2-2y+y^2|\right]_{y=0}^{y=1} = \frac14\ln 2$

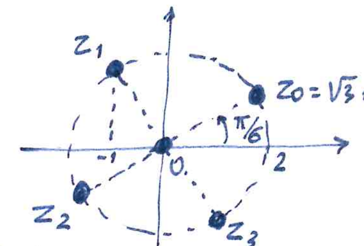
---

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $z^3 = 2(-1+i\sqrt3)\bar z$ E DISEGNARE LE SOLUZIONI NEL PIANO COMPLESSO

Poniamo $z = \rho e^{i\theta}$; allora $\bar z = \rho e^{-i\theta}$; poi $-1+i\sqrt3 = 2e^{2\pi i/3}$, quindi l'equazione si scrive: $\rho^3 e^{3i\theta} = 4\rho e^{(-\theta+\frac{2\pi}{3})i}$. Uguagliando i moduli si ha $\rho^3 = 4\rho$, $\rho(\rho^2-4) = 0$, quindi $\rho = 0 \vee \rho = 2$ (deve essere $\rho \geq 0$) $\rho = 0$ dà $z = 0$; $\rho = 2$ dà $e^{3i\theta} = e^{(-\theta+\frac{2\pi}{3})i}$, quindi $3\theta = -\theta + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Si ottengono soluzioni diverse con $\theta = 0,1,2,3$, poi si ritrovano le stesse. Oltre a $z = 0$ ci sono quindi altre quattro soluzioni:

$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = \sqrt3 + i$; $z_1 = -1+\sqrt3 i = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$z_2 = 2e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\sqrt3 - i$, $z_3 = 2e^{\frac{5\pi}{3}i} = 1 - \sqrt3 i$



---

5) SIA f L'ENDOMORFISMO DI $\mathbb{R}^3$ DEFINITO RISPETTO ALLA BASE CANONICA DALLA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. DETERMINARE LA MATRICE B CHE RAPPRESENTA f NELLA BASE $\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \mathcal{B}$

La matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica è $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; la matrice inversa C^{-1} è la matrice di passaggio dalla base canonica a $\mathcal{B}$. Si calcola $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. La matrice B che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è: $B = C^{-1}\cdot A\cdot C$; svolgendo i calcoli si ottiene $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5) (SECONDA PARTE): CALCOLARE GLI AUTOVALORI DI A E UNA BASE PER CIASCUN AUTOSPAZIO

Gli autovalori di A sono gli stessi di B, e questi sono evidenti in quanto che B è triangolare superiore: l'unico autovalore è $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 3. I corrispondenti autovettori per A si ottengono risolvendo $(A-2I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, cioè: $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases} \iff x = 3z-2y$ per ogni $y,z \in \mathbb{R}$

Gli autovettori sono quindi $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3z-2y\\y\\z\end{pmatrix}$, $y,z \in \mathbb{R}$. L'autospazio ha dimensione 2 (se ne deduce incidentalmente che A non è diagonalizzabile) e una base per l'autospazio è: $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$