1) PROBLEMA DI CAUCHY: ① $y''+4y'=64xe^{-4x}$; $y(0)=0$; $y'(0)=4$

E.D. omogenea associata: ② $y''+4y'=0$; EQ. CARATTERISTICA DI ②: $\lambda^2-4\lambda=0 \to \lambda = \begin{cases}0\\-4\end{cases}$

Soluzione generale di ②: $C_1+C_2e^{-4x}$. Ora cerchiamo una soluzione di ①.

$f(x)=64xe^{-4x}$ è "di tipo ④" con $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ \hline 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}$ e allora c'è una soluzione di ① della forma:

(5') $z(x)=xe^{-4x}(ax+b)=(ax^2+bx)e^{-4x}$; si calcola allora:

$z'(x)=(2ax+b-4ax^2-4bx)e^{-4x}$; $z''(x)=(2a-8ax-4b-8ax-4b+16ax^2+16bx)e^{-4x}$;

$$\left.\begin{matrix} z'' \\ +4z' \end{matrix}\right\} = e^{-4x}\left[\begin{matrix} 16ax^2+(-16a+16b)x+2a-8b \\ -16ax^2+(8a-16b)x \qquad +4b \end{matrix}\right]$$

$$= e^{-4x}(\cancel{\ } \quad -8ax \quad +2a-4b) \quad \text{desiderato} = 64xe^{-4x}$$

Bisogna che sia $\begin{cases}-8a=64\\2a-4b=0\end{cases}$ quindi $\begin{matrix}a=-8\\b=-4\end{matrix}$ e $z(x)=(-8x^2-4x)e^{-4x}$.

Soluzione generale di ①: $y(x)=(-8x^2-4x+C_2)e^{-4x}+C_1$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$y'(x)=(-\cancel{16x}-4+32x^2+\cancel{16x}-4C_2)e^{-4x}$. $\begin{matrix} y(0)= \\ y'(0)= \end{matrix}\begin{cases}C_2+C_1 = 0\\ -4-4C_2 = 4\end{cases} \to \begin{cases}C_1=2\\C_2=-2\end{cases}$

Soluzione del problema di Cauchy: $y(x)=(-8x^2-4x-2)e^{-4x}+2$; $x\in\,]-\infty,+\infty[$

---

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y)=x^2e^{2x-y^2}$

$\begin{matrix} f'_x = \\ f'_y = \end{matrix}\begin{cases}(2x+2x^2)e^{2x-y^2}=0 & ① \\ -2x^2y\,e^{2x-y^2}=0 & ②\end{cases}$

② $\to x=0 \vee y=0$

Se $x=0$ allora ② dà una identità.

Tutti i punti $(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$ sono punti critici per f; essi sono punti di MINIMO ASSOLUTO per f, essendo $f(0,y)=0$, e $f(x,y)\geq 0$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Se $y=0$ allora ① dà $x=0 \vee x=-1$. Il punto $(0,0)$ è già stato trattato; c'è un ulteriore punto critico $(-1,0)$. Per classificare questo punto calcoliamo la matrice hessiana di f.

$f''_{xx} = (2+4x+4x+4x^2)e^{2x-y^2}$ $\qquad f''_{xy} = -2y(2x+2x^2)e^{2x-y^2}$

$f''_{yx} = (-4xy-4x^2y)e^{2x-y^2}$ $\qquad f''_{yy} = (-2x^2+4x^2y^2)e^{2x-y^2}$

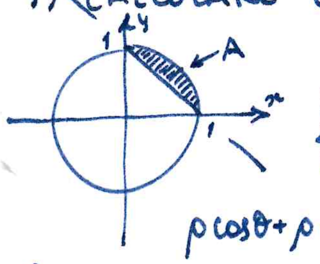
e quindi $H(-1,0)=\begin{pmatrix}-2e^{-2} & 0\\ 0 & -2e^{-2}\end{pmatrix}$; $\det H(-1,0)=4e^{-4}>0$; $f''_{xx}(-1,0)=-2e^{-2}<0$;

quindi $(-1,0)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO per f

CH. IND. 06.04.2018

---

3) CALCOLARE L'INTEGRALE DOPPIO: $\iint_A \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq 1;\ x+y\geq 1\}$



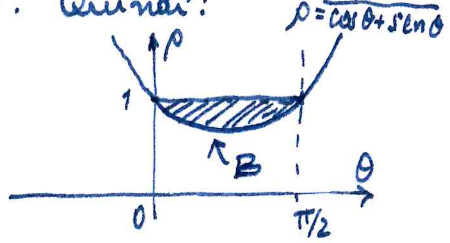
Applichiamo il cambiamento di variabili in coordinate polari:

$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\,\text{sen}\,\theta\end{cases}$. L'insieme B in cui variano (ρ,θ) è descritto da:

$\rho^2\leq 1$ quindi $0\leq\rho\leq 1$;

$\rho\cos\theta+\rho\,\text{sen}\,\theta\geq 1 \to \rho(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)\geq 1 \to \rho\geq\frac{1}{\cos\theta+\text{sen}\,\theta}$, tenendo presente che θ varia in $[0,\frac{\pi}{2}]$, e per questi θ è $\cos\theta+\text{sen}\,\theta>0$. Quindi:

$B=\{(\rho,\theta);\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}];\ \frac{1}{\cos\theta+\text{sen}\,\theta}\leq\rho\leq 1\}$. Allora:



$$\iint_A \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_{\frac{1}{\cos\theta+\text{sen}\,\theta}}^{1}\frac{\cancel{\rho}(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)}{\cancel{\rho^2}}\cdot\cancel{\rho}\,d\rho\right)d\theta =$$

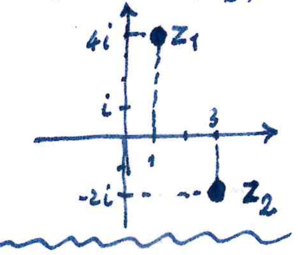
$$= \int_0^{\pi/2}\left[\rho(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)\right]_{\rho=\frac{1}{\cos\theta+\text{sen}\,\theta}}^{\rho=1}d\theta = \int_0^{\pi/2}(\cos\theta+\text{sen}\,\theta-1)\,d\theta =$$

$$= \left[\text{sen}\,\theta-\cos\theta-\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = 1-\frac{\pi}{2}+1 = 2-\frac{\pi}{2}.$$

---

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $z^2-(4+2i)z+(11+10i)=0$

E' una equazione di 2° grado; le soluzioni sono: $z=2+i\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}$, dove "$\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}$" indica le radici quadrate complesse del discriminante ridotto: $\frac{\Delta}{4}=(2+i)^2-11-10i=$ $=4-1+4i-11-10i=-8-6i$. Si ha $|-8-6i|=10$ e, detto $\theta=\arg(-8-6i)$, è: $\cos\theta=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$; $\text{sen}\,\theta=\frac{-3}{5}$; $\tan\theta=\frac{3}{4}$. $\theta\in\,]\pi,\frac{3}{2}\pi[$. Le radici quadrate di $-8-6i$ sono: $\pm\sqrt{10}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$. E' noto che $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)=\frac{1}{10}$; $\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)=\frac{9}{10}$. Inoltre $\frac{\theta}{2}\in\,]\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi[$, quindi $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)<0$ e $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$; infine $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{-1}{\sqrt{10}}$, $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{3}{\sqrt{10}}$ e le radici quadrate di $-8-6i$ sono: $\pm\sqrt{10}\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}i\right)=\pm(-1+3i)$. Le soluzioni della equazione di secondo grado sono: $z=2+i\pm(-1+3i)=\begin{cases}1+4i & (z_1)\\ 3-2i & (z_2)\end{cases}$



---

5) SIA f L'ENDOMORFISMO DI $\mathbb{R}^3$ DI MATRICE $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ RISPETTO ALLA BASE CANONICA. DETERMINARE NUCLEO, IMMAGINE DI f, EQUAZIONE CARTESIANA DELL'IMMAGINE, AUTOVETTORI E AUTOVALORI DI f.

- Nucleo: $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{cases}z=0\\x=0\end{cases}$. Il nucleo è: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=z=0\}=\{(0,y,0),\ y\in\mathbb{R}\}=\text{Span}\{(0,1,0)\}$
- Immagine. $Im(f)$ è generata dalle colonne di A, quindi la sua rappresentazione parametrica può essere: $\begin{cases}x=s\\y=s\\z=t\end{cases}$, $t,s\in\mathbb{R}$. Dalle ultime due equazioni si ricavano i parametri: $t=z$, $s=y$; sostituendo s con y nella prima equazione si trova $\boxed{x=y}$, equazione cartesiana di $Im(f)$. Si nota che $\dim Im(f)=2$, mentre $\dim \ker(f)=1$; $2+1=3$ come dovuto.
- Autovalori di A. $\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&0&1\\0&-\lambda&1\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda(\lambda^2-1)$; $\det(A-\lambda I)=0$ se $\lambda=0, 1, -1$.
- Autovettori di A. Con $\lambda=0$, l'autospazio è $\ker f=\text{Span}\{(0,1,0)\}$.

Con $\lambda=1$: $(A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{cases}-x\quad +z=0\\ \quad -y+z=0\\ x \quad -z=0\end{cases} \to \begin{cases}x=z\\y=z\end{cases}$. L'autospazio è:

$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=z;\ y=z\}=\{(z,z,z);\ z\in\mathbb{R}\}=\text{Span}\{(1,1,1)\}$

Con $\lambda=-1$: $(A+I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{cases}x\quad +z=0\\ \quad y+z=0\\ x\quad +z=0\end{cases} \to \begin{cases}x=-z\\y=-z\end{cases}$. L'autospazio è:

$S_{-1}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=-z;\ y=-z\}=\{(-z,-z,z);\ z\in\mathbb{R}\}=\text{Span}\{(-1,-1,1)\}$.