1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{2x}{\sqrt{2y+1}}$; $y(5) = 4$

(E.D. a variabili separabili). $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{2y+1}}$; $\int (2y+1)^{\frac12}\, dy = \int 2x\, dx$;

$\frac23 \cdot \frac12 (2y+1)^{3/2} = x^2 + C$. $\left.\begin{matrix} x=5 \\ y=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac13 \cdot 9^{3/2} = 25 + C$; $C = 9-25 = -16$.

$\frac13 (2y+1)^{3/2} = x^2 - 16$; $(2y+1)^{3/2} = 3(x^2-16)$; $2y+1 = \left(3(x^2-16)\right)^{2/3}$;

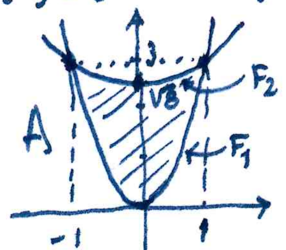
$y(x) = \frac12\left(\left[3(x^2-16)\right]^{2/3} - 1\right)$. DOMINIO della soluzione: l'espressione x^2-16 non deve annullarsi, altrimenti $y(\cdot)$ non è derivabile. Siccome per $x = 5$ tale espressione è >0, così deve rimanere. Allora: $x^2 - 16 > 0 \iff x < -4 \vee x > 4$. L'intervallo contenente $x = 5$ è: $]4, +\infty[$

---

2) Calcolare il minimo e il massimo valore che $f(x,y) = 9x^2 - y^3$ assume nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y^2 - x^2 \le 8 ;\ y \ge 3x^2\}$.

$\begin{cases} y^2 - x^2 = 8 \\ y = 3x^2 \end{cases} \to \begin{cases} y^2 - \frac13 y = 8 \\ x^2 = \frac13 y \end{cases}$ $3y^2 - y - 24 = 0$; $y = \frac{1 \pm 17}{6} = \begin{cases} 3 \\ -\frac83 \end{cases}$

$x^2 = -\frac89$ impossibile; $x^2 = 1 \to x = \pm 1$



• $\operatorname{grad} f = (18x ; -3y^2)$; $\operatorname{grad} f = (0,0)$ se $(x,y) = (0,0)$

• FRONTIERA di A: $Fr.A = F_1 \cup F_2$ con:

$F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y = 3x^2 ;\ x \in [-1,1]\}$

$F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y^2 - x^2 = 8 ;\ y > 0,\ -1 \le x \le 1\}$

$\boxed{f(0,0) = 0}$

SE $(x,y) \in F_1$ allora $3x^2 = y$; $9x^2 = 3y$ e $f(x,y) = 3y - y^3 \equiv g_1(y)$ con $y \in [0,3]$. Abbiamo $\boxed{g_1(0) = 0}$. $g_1(3) = -18$ $\boxed{g_1(3) = -18}$. $g_1'(y) = 3 - 3y^2$; $g_1'(y) = 0$ se $y = \pm 1$; soltanto $x = 1 \in [0,3]$. $\boxed{g_1(1) = 2}$.

SE $(x,y) \in F_2$ allora $x^2 = y^2 - 8$ e $f(x,y) = 9y^2 - 72 - y^3 \equiv g_2(y)$ con $y \in [\sqrt8, 3]$.

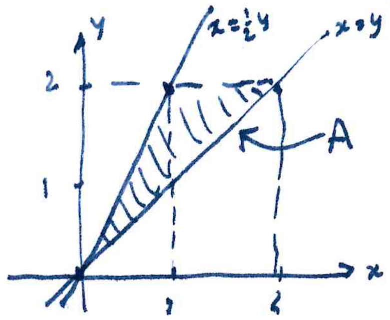
$\boxed{g_2(\sqrt8) =}$ $72 - 72 - 8\sqrt8 = \boxed{-16\sqrt2}$; $\boxed{g_2(3) =}$ $81 - 72 - 27 = \boxed{-18}$;

$g_2'(y) = 18y - 3y^2 = 3y(6-y)$; $g_2'(y) = 0 \iff y = \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}$ entrambi $\notin [\sqrt8, 3]$

Confrontando i valori calcolati si ha: $\min_A f(x,y) = -16\sqrt2$; $\max_A f(x,y) = 2$

---

3) Calcolare l'integrale: $(*) \iint_A e^{y^2}\, dx\, dy$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \le y \le 2x ;\ y \le 2\}$.



$(*) = \int_0^2 \left(\int_{\frac12 y}^{y} e^{y^2}\, dx \right) dy = \int_0^2 \left[x e^{y^2} \right]_{x=\frac12 y}^{x=y} dy =$

$= \int_0^2 \frac12 y\, e^{y^2}\, dy = \frac14 \left[e^{y^2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac14 (e^4 - 1)$.

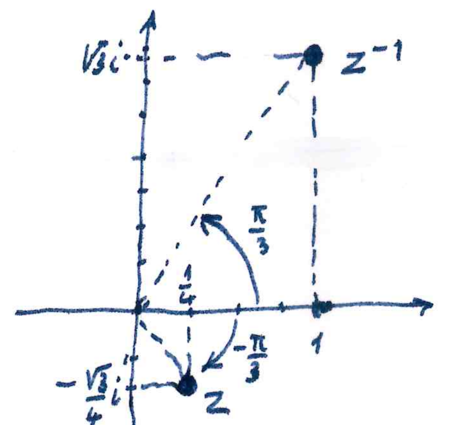
---

4) SCRIVERE IL NUMERO COMPLESSO $z = \frac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{(1+i)^2}$ IN FORMA ALGEBRICA E IN FORMA ESPONENZIALE. IDEM PER z^{-1}.

$|1+i| = \sqrt2$; $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ quindi $(1+i)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, e perciò

$z = \frac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{2e^{\frac{\pi}{2}i}} = \frac12 e^{(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2})i} = \frac12 e^{-\frac{\pi}{3}i} = \frac12\left(\frac12 - \frac{\sqrt3}{2}i\right) = \frac14 - \frac{\sqrt3}{4}i$;

$z^{-1} = 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\frac12 + \frac{\sqrt3}{2}i\right) = 1 + \sqrt3 i$



---

5) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ composta di autovettori per f. Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{B}$ e descrivere f geometricamente.

• AUTOVALORI. $\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 1) = (\lambda+1)(1-\lambda)^3$

Gli autovalori sono: $\lambda = -1$ (semplice) ; $\lambda = 1$ (triplo).

AUTOSPAZIO RELATIVO A $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y + t = 0 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff x = z = 0 ;\ t = -y$

$\to S_{-1} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

AUTOSPAZIO RELATIVO A $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = t$. Autovettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ y \end{pmatrix}$ $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

$S_1 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. I vettori della unione delle due basi, di S_1 e S_1, sono già a due a due ortogonali. Per ottenere una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^4$ è sufficiente dividerli per la rispettiva norma:

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt2 \\ 0 \\ -1/\sqrt2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt2 \\ 0 \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Rispetto alla base $\mathcal{B}$ (così ordinata) la matrice che rappresenta f è: $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Essa manifesta il significato geometrico di f in $\mathbb{R}^4$: indicate con $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$ le coordinate dei vettori relative alla base $\mathcal{B}$, f trasforma un vettore di componenti $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} -x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$; quest'ultimo è il simmetrico del precedente rispetto all'iperpiano di equazione $x' = 0$.

f è quindi la RIFLESSIONE rispetto a tale iperpiano.

CH. IND. 11 GIUGNO 2018