1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{2y}{x^2+2x} + x^2$; $y(-1) = 1$

E.D. lineare di ordine 1: $y' = ay + b$ con $a(x) = \frac{2}{x^2+2x}$, $b(x) = x^2$; $x \in I =]-2, 0[$

$A(x) = \int \frac{2}{x^2+2x}dx$. Si calcola $\frac{2}{x^2+2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$ e quindi $A(x) = \int(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2})dx =$

$= \ln(-x) - \ln(x+2)$ (tenendo presente che $x \in]-2,0[$; cioè $A(x) = \ln(\frac{-x}{x+2})$.

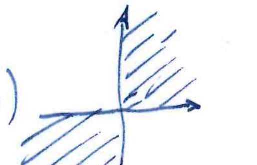
$y(x) = e^{A(x)}(C + \int b(x)e^{-A(x)}dx) = \frac{-x}{x+2}(C + \int x^2 \frac{x+2}{-x} dx) = \frac{-x}{x+2}(C + \int(-x^2-2x)dx) =$

$= \frac{-x}{x+2}(C - \frac{1}{3}x^3 - x^2)$. Allora $y(-1) = C - \frac{2}{3}$, desiderato $= 1$; perciò

$C = \frac{5}{3}$, e la soluzione del problema di Cauchy è: $y(x) = \frac{-x}{x+2}(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}x^2 - x^2) =$

$= \frac{x(x^3+3x^2-5)}{x+2}$, $x \in]-2, 0[$.

2) DOMINIO E PUNTI CRITICI DI $f(x,y) = 16\ln(xy) - 4y - 8xy - y^2$.



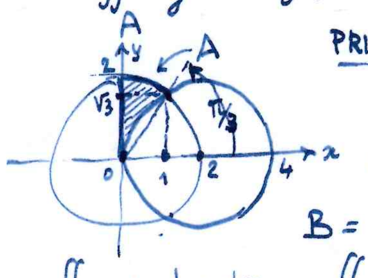
Dominio: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy > 0\}$. (1° e 3° quadrante del piano cartesiano)

$\begin{cases} f'_x = \frac{16}{x} - 8y = 0 \\ f'_y = \frac{16}{y} - 8x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ \cancel{8x} - \cancel{8x} - 2y - 4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ Unico punto critico: $(-1,-2)$.

Matrice Hessiana: $H(x,y) = \begin{pmatrix} -16/x^2 & -8 \\ -8 & -16/y^2 - 2 \end{pmatrix}$; $H(-1,-2) = \begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$; $\det H = 32 > 0$;

$f''_{xx}(-1,-2) = -16 < 0$; quindi $(-1,-2)$ è PUNTO DI MASSIMO RELATIVO per f.

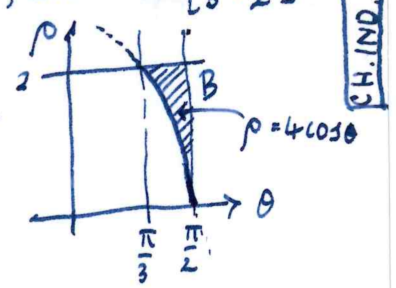
3) $\iint y\,dx\,dy$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \le 4;\ x^2+y^2-4x \ge 0;\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$



PRIMO METODO: con uso delle coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\theta \end{cases}$

$x^2+y^2 \le 4$ dà $0 \le \rho \le 2$; $x^2+y^2-4x \ge 0$ dà $\rho^2 - 4\rho\cos\theta \ge 0$ quindi $\rho \ge 4\cos\theta$; quindi $4\cos\theta \le \rho \le 2$, con $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

$B = \{(\rho,\theta);\ \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}];\ \rho \in [4\cos\theta, 2]\}$.



$\iint_A y\,dx\,dy = \iint_B \rho^2\,\text{sen}\theta\,d\rho\,d\theta = \int_{\pi/3}^{\pi/2}(\int_{4\cos\theta}^{2} \rho^2\,\text{sen}\theta\,d\rho)d\theta =$

$= \frac{1}{3}\int_{\pi/3}^{\pi/2}[\rho^3]_{\rho=4\cos\theta}^{\rho=2}\,\text{sen}\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int_{\pi/3}^{\pi/2}(8\,\text{sen}\theta - 64\cos^3\theta\,\text{sen}\theta)d\theta =$

$= \frac{8}{3}[-\cos\theta + 2\cos^4\theta]_{\theta=\pi/3}^{\theta=\pi/2} = \frac{8}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}) = 1$.

SECONDO METODO: in coordinate cartesiane.

$\iint_A y\,dx\,dy = \int_0^1(\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy)dx = \frac{1}{2}\int_0^1[y^2]_{y=\sqrt{4x-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1(4 - \cancel{x^2} - 4x + \cancel{x^2})dx =$

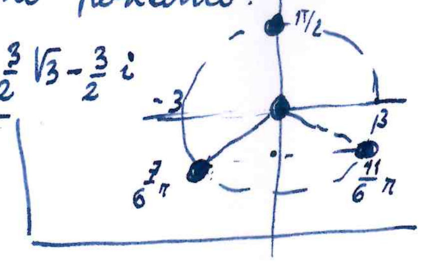
$= \frac{1}{2}\int_0^1(4-4x)dx = \frac{1}{2}[4x - 2x^2]_{x=0}^{x=1} = 1$

CH. IND. 10 LUGLIO 2018

4) SCRIVERE IN FORMA ALGEBRICA E ESPONENZIALE, E RAPPRESENTARE GEOMETRICAMENTE I NUMERI COMPLESSI $z \in \mathbb{C}$ TALI CHE $z^2 = -3i\bar{z}$. (*)

Posto $z = \rho e^{i\theta}$, con $\rho = |z|$, si ha $z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ cosicché (*) si scrive: $\rho^2 e^{2i\theta} = -3i\rho e^{-i\theta}$. Questa è soddisfatta se $\rho = 0$ (da cui la soluzione $z = 0$) oppure $\rho e^{3i\theta} = -3i$ (**) Uguagliando i moduli in (**) si trova $\rho = 3$; allora $e^{3i\theta} = -i$ cioè $e^{3i\theta} = e^{\frac{3\pi}{2}i}$, soddisfatta se e solo se $3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi$. Si ottengono soluzioni z diverse per soli tre valori consecutivi di k, per esempio 0, 1, 2, che danno a θ i valori $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$. Le soluzioni di (*) sono pertanto:

$z = 0$; $z = 3e^{\frac{\pi}{2}i} = 3i$; $z = 3e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$; $z = 3e^{\frac{11\pi}{6}i} = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$



5) SIA $v = (1,0,0,1)$; $A = v^T \cdot v$. SCRIVERE A, CALCOLARE RANGO, AUTOVALORI DI A E UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^4$ FORMATA DA AUTOVETTORI PER A.

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1,0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango **1**. Il polinomio caratteristico è

$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2((1-\lambda)^2 - 1) = \lambda^3(\lambda - 2)$

quindi gli autovalori sono $\lambda_0 = 0$ (triplo); $\lambda_1 = 2$ (semplice).

Autovettori corrispondenti a $\lambda = 0$: soluzioni di: $x + 0y + 0z + t = 0 \to t = -x$, sono $(x,y,z,t) = (x,y,z,-x)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$. Calcoliamone tre, fra loro ortogonali: $v_1 = (1,0,0,-1)$; $v_2 = (0,1,0,0)$; $v_3 = (0,0,1,0)$; v_2 e v_3 hanno già norma 1; v_1 si normalizza in $(1/\sqrt{2}, 0, 0, -1/\sqrt{2})$.

Autovettore corrispondente a $\lambda = 2$: una soluzione di: $\begin{cases} -x + t = 0 \\ -2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$ cioè $(x,y,z,t) = (x,0,0,x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Un vettore di questo tipo, avente norma 1, è $v_4 = (1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2})$.

Una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori per A è:

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$.