1) PROBLEMA DI CAUCHY: $y' = \frac{x}{(3y+1)^3}$; $y(4) = \frac{1}{3}$

E.D. a variabili separabili, $y' = f(x)\cdot g(y)$ con $\begin{cases} f(x) = x\ , & x \in I =]-\infty, +\infty[\\ g(y) = (3y+1)^{-3}\ , & y \in J =]-\frac{1}{3}, +\infty[\end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(3y+1)^3}$; $\int (3y+1)^3 dy = \int x\, dx$; $\frac{(3y+1)^4}{12} = \frac{1}{2}x^2 + C$;

$\left.\begin{matrix} x = 4 \\ y = \frac{1}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{4}{3} = 8 + C$; $C = -\frac{20}{3}$ $\rightarrow$ $\frac{(3y+1)^4}{12} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{20}{3}$;

$(3y+1)^4 = 6x^2 - 80$; $3y+1 = \pm\sqrt[4]{6x^2-80}$; $y = \frac{1}{3}(-1 \pm \sqrt[4]{6x^2-80})$

Per avere $y(4) = \frac{1}{3}$ occorre scegliere il segno + in $\pm$. La soluzione del problema di Cauchy è: $y(x) = \frac{1}{3}(-1 + \sqrt[4]{6x^2-80})$.

DOMINIO DELLA SOLUZIONE: $6x^2 - 80 > 0 \iff x < -2\sqrt{\frac{10}{3}} \ \vee\ x > 2\sqrt{\frac{10}{3}}$; l'intervallo contenente $x_0 = 4$ è $I_0 =]2\sqrt{\frac{10}{3}}, +\infty[$.

---

2) PUNTI CRITICI PER $f(x,y) = 4x + y + e^{x^2-y}$.

$\begin{cases} f'_x = 4 + 2x e^{x^2-y} = 0 & ① \\ f'_y = 1 - e^{x^2-y} = 0 & ② \end{cases}$ $\quad$ $② \rightarrow e^{x^2-y} = 1$; $① \rightarrow 4 + 2x = 0 \rightarrow x = -2$;

② (con $x = -2$) $\rightarrow$ $e^{4-y} = 1 \rightarrow 4 - y = 0 \rightarrow y = 4$

C'è un solo punto critico: $P = (-2, 4)$

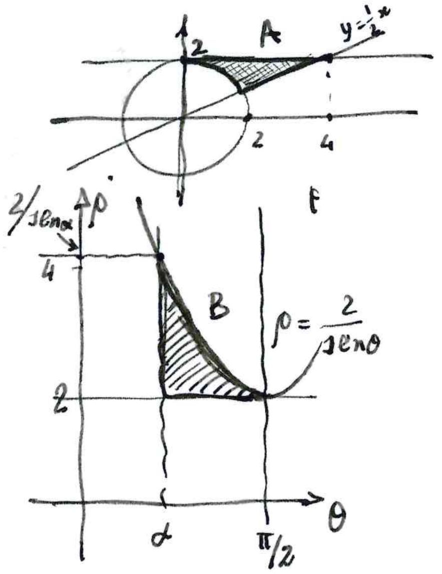
$f''_{xx} = 2e^{x^2-y} + 4x^2 e^{x^2-y}$; $f''_{xy} = f''_{yx} = -2x e^{x^2-y}$; $f''_{yy} = e^{x^2-y}$;

matrice Hessiana: $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2-y}(1+2x^2) & -2x e^{x^2-y} \\ -2x e^{x^2-y} & e^{x^2-y} \end{pmatrix}$

$H(-2,4) = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\det H = 2 > 0$, $f''_{xx}(-2,4) = 18 > 0$; perciò P è punto di MINIMO RELATIVO per f.

---

3) INTEGRALE DOPPIO: $\iint_A y\, dx dy$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \geq 4,\ x \geq 0;\ \frac{1}{2}x \leq y \leq 2\}$



Applichiamo le coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\, sen\theta \end{cases}$

$\iint_A y\, dx\, dy = \iint_B \rho^2 sen\theta\, d\rho\, d\theta$;

$B = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty[\times [0, 2\pi];\ \rho^2 \geq 4;\ \frac{1}{2}\rho\cos\theta \leq \rho\, sen\theta \leq 2\}$

Da $\rho^2 \geq 4$ segue $\rho \geq 2$, perché $\rho \geq 0$;

$\frac{1}{2}\rho\cos\theta \leq \rho\, sen\theta \rightarrow sen\theta \geq \frac{1}{2}\cos\theta \rightarrow \tan\theta \geq \frac{1}{2} \rightarrow \theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]$, essendo $\alpha = \arctan(\frac{1}{2})$; $\rho\, sen\theta \leq 2 \rightarrow \rho \leq \frac{2}{sen\theta}$.

$B = \{(\rho,\theta);\ \theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}];\ 2 \leq \rho \leq \frac{2}{sen\theta}\}$.

Allora abbiamo:

$$\iint_B \rho^2 sen\theta\, d\rho\, d\theta = \int_\alpha^{\pi/2} \left(\int_2^{\frac{2}{sen\theta}} \rho^2\, d\rho \right) \cdot sen\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\int_\alpha^{\pi/2} \left[\rho^3\right]_{\rho=2}^{\rho=\frac{2}{sen\theta}} sen\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_\alpha^{\pi/2} \left(\frac{8}{sen^2\theta} - 8\, sen\theta \right) d\theta = \frac{8}{3}\int_\alpha^{\pi/2} (-\cot\theta + \cos\theta)\, d\theta = \frac{8}{3}(\cot\alpha - \cos\alpha)$$

Il risultato si può scrivere più semplicemente, osservando che $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 2$, e $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; quindi $\cot\alpha - \cos\alpha = \frac{16}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

---

4) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$: $z^5 \bar{z} = \frac{(2i)^7}{(1+i)^2}$; RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LE SOLUZIONI.

$(2i)^7 = 128\cdot(-i)$; $(1+i)^2 = 2i$; quindi $\frac{(2i)^7}{(1+i)^2} = -64$.

Se $z = \rho e^{i\theta}$ allora $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$, $z^5 = \rho^5 e^{5i\theta}$. Allora abbiamo

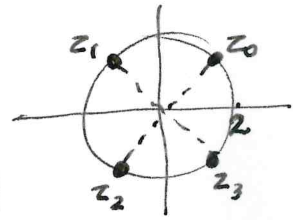
$\rho^6 e^{4i\theta} = -64$. Uguagliando i moduli, $\rho^6 = 64 \rightarrow \rho = 2$; allora

$e^{4i\theta} = -1$ $(= e^{i\pi})$. Quindi $4\theta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$; si ottengono valori diversi di z con $k = 0, 1, 2, 3$

$z_0 = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$;

$z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$; $z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$.



---

5) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & k \end{pmatrix}$ con k parametro reale.

Calcolare una base dell'autospazio S_1 relativo all'autovalore 1, nei casi $k = 3$ e $k \neq 3$. Nel caso $k = 3$, dire se A è diagonalizzabile.

Autospazio S_1 : $(A - 1\mathbb{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ x - 3y + (k-1)z = 0 \end{cases}$

La 1ª equazione (e la 2ª) danno $x - 3y = -2z$; la 3ª diventa allora: $-2z + (k-1)z = 0$; $(k-3)z = 0$. Se $k \neq 3$ questa dà $z = 0$, cosicché $S_1 = \{(x,y,z);\ z = 0;\ x = 3y\} = \{(3y, y, 0),\ y \in \mathbb{R}\} = Span(\{(3,1,0)\})$

Se $k = 3$, "$(k-3)z = 0$" è una identità, e allora $S_1 = \{(x,y,z);\ x = 3y\} = \{(3y, y, z);\ y, z \in \mathbb{R}\} = Span\{\{(3,1,0); (0,0,1)\}$

Poniamo ora $k = 0$ e calcoliamo gli autovalori di A.:

$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$ (svolgendo i calcoli) $(1-\lambda)^3$

L'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 3 ; la molteplicità geometrica vale invece 2, dimensione di S_1 nel caso $k = 3$; perciò quando $k = 3$, A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (e nemmeno su $\mathbb{C}$)

CH. IND. 5 SETTEMBRE 2018