Esercitazione di Matematica 4/12/2014 Dott. F. Greco

1. Si considerino le seguenti matrici a coefficienti complessi:

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 1-4i & 2 \\ 0 & 1-3i & i-1 \\ 0 & 0 & 3i+1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & i-1 \\ i & -i & -i \\ -1 & 1 & 1+i \end{bmatrix}$$

   (a) Si calcoli il determinante di A e di B

   (b) Servendosi del Teorema di Binet si calcoli il determinante delle matrici A^3, AB e A^2B^3

2. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & \lambda-1 \end{bmatrix}$ si stabilisca se esistono valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ affinche' si abbia $A^2 = I_2$ dove I_2 denota la matrice identita' di ordine due.

3. Discutere il rango delle seguenti matrici, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1-k^2 & k \\ k+1 & k+2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & k+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & k+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & k \\ 2 & 1 & 2 & k+1 \\ k & 0 & k & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1+k^2 & k+1 \\ 1 & k \end{bmatrix}$$

4. Si consideri la matrice a coefficienti reali: $A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda^2-1 & 0 & 4-\lambda \\ 1 & 2\lambda-3 & 0 \end{bmatrix}$

   dove λ e' un parametro reale.

   (a) Si determinino gli eventuali valori di λ per i quali la matrice A_λ risulta invertibile.

(b) Servendosi eventualmente del punto (a) si determinino gli eventuali valori di λ per i quali il rango di A_λ risulta massimo.

6. Si consideri la seguente matrice A a coefficienti reali:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{k} & 1 & 0 \\ k-1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (k \in \mathbb{R}^+)$$

(a) Calcolare gli eventuali valori del parametro k affinchè A sia non singolare.

(b) Servendosi eventualmente di (a) trovare i valori di k affinche' il sistema lineare $Ax = b$ ammetta precisamente una soluzione, essendo

$$b = (1-k, 0, k)^t.$$

7. Servendosi del Teorema di Rouche' Capelli risolvere i seguenti sistemi lineari a coefficienti reali:

In $\mathbb{R}^2$

$$(a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ -5x_1 + 3x_2 = -1 \\ -3x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^3$

$$(c) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^4$

$$(d) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(e) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_4 = -1 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = -1 \end{cases}$

8. Dato il sistema lineare $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

si verifichi, con il metodo di Gauss che esistono infinite soluzioni.

9. Servendosi del Teorema di Rouche' Capelli discutere i seguenti sistemi lineari parametrici ($k \in \mathbb{R}$):

In $\mathbb{R}^2$

$(a) \begin{cases} x_1 - (k+1)x_2 = k \\ 2x_1 - 2x_2 = 2k \\ (k+2)x_1 + (k-2)x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad (b) \begin{cases} x_1 - x_2 = k - 2 \\ kx_1 + (k-4)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (2-2k)x_2 = 2k - 4 \end{cases}$

In $\mathbb{R}^3$

$$(c) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 1 - k \\ x_2 + (1-k)x_3 = 1 \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^4$

$$(d)\begin{cases} kx_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k-1)x_1 + (k-1)x_2 = k-1 \\ kx_1 + kx_2 = 2k \end{cases}$$

$$\text{(e)}\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ kx_1 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

10. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1, 2, k), u_2 = (-1, 5, -3), u_3 = (1, k+1, 0)$$

  (a) Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione del sottospazio $Span(u_1, u_2, u_3)$
  (b) Servendosi eventualmente del punto (a) stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ i vettori u_1, u_2, u_3 formano una base di $\mathbb{R}^3$
  (c) Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ in modo che il vettore $(1, -50, 150)$ sia una combinazione lineare di u_1, u_2, u_3.

11. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (h-1, 1, 1), v_2 = (h^3 - 1, h+1, 1)$$

  (a) Esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ in modo che u_1 e u_2 siano linearmente indipendenti? Se si' trovarli.
  (b) Servendosi eventualmente del punto (a) stabilire se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ in modo che $\dim Span(u_1, u_2) = 2$. Se si' trovarli.
  (c) Stabilire per quali $h \in \mathbb{R}$ i vettori u_1, u_2, e_3 formano una base di $\in \mathbb{R}^3$ essendo $e_3 = (0, 0, 1)$

12. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori:

$$u_1 = (2, 0, 1, -1), u_2 = (1, 1, 2, 0), u_3 = (4, -2, -1, -3)$$

(a) Determinare $\dim U$ e una base di U

(b) Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il vettore $(1+\lambda, 1, 3, -1)$ appartiene a U.

13. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = (1, 0, 1, -1), u_2 = (0, 1, 1, 0), u_3 = (0, 0, 2, -1)$$

(a) Verificare che u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti.

(b) E' possibile scrivere il vettore u_3 come una combinazione lineare dei vettori u_1 e u_2?

(c) Si stabilisca se il vettore $w = (0, -1, -3, 1)$ appartiene al sottospazio $Span(u_1, u_2, u_3)$ e, in caso affermativo, si scriva w come una combinazione lineare dei vettori u_1, u_2, u_3

(d) La combinazione lineare trovata in (c) é unica?

14. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (k, 1, 1), u_2 = (1, k, 1), u_3 = (1, 1, k)$$

dove k denota un parametro reale.

(a) Verificare che u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti per $\forall k \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$

(b) Posto $k = 0$ scrivere, se possibile, il vettore $(1, 0, -1)$ come una combinazione lineare dei vettori u_1, u_2, u_3.

(c) La combinazione lineare trovata in (b) é unica?

15. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = (0, -1, 2, 1), u_2 = (0, -2, 2, -2), u_3(1, -3, 4, -1).$$

(a) Si dica se i tre vettori sono linearmente indipendenti

(b) Si stabilisca qual è la dimensione di U, sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da u_1, u_2, u_3

(c) Si determini una base di U

(d) il vettore $u_1 + 3u_2 - 100u_3$ appartiene a U?

16. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = (1, -1, 0, 1), u_2 = (2, 0, -1, 1), u_3 = (0, 1, 1, -3).$$

(a) Si dica se i tre vettori sono linearmente indipendenti

(b) Si stabilisca qual e' la dimensione di U, sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da u_1, u_2, u_3

(c) Si determini una base B di U

(d) Si completi B ad una base di $\mathbb{R}^4$.

17. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, -1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 0, 1), v_3(1, 0, 1, 1), v_4 = (0, 0, 0, 0)$$

e sia $W = Span(v_1, v_2, v_3, v_4)$ il sottospazio di $\in \mathbb{R}^4$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3, v_4

(a) Si dica qual è la dimensione di W

(b) Si dia una base B di W

(c) Si completi B ad una base di $\mathbb{R}^4$

(d) il vettore $(-3, 1, -3, -2)$ appartiene a W?

18. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 0, 1), v_3 = (-2, 0, 0, 1), v_4 = (2, 0, 1, 2)$$

e sia $W = Span(v_1, v_2, v_3, v_4)$ il sottospazio di $\in \mathbb{R}^4$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3, v_4

(a) Provare che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti

(b) Si trovi un vettore $w \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = Span(v_1, v_2, v_3, w)$

(c) La scelta di w al punto (b) è unica? Si motivi la risposta.

(d) Dire se v_4 appartiene a $Span(v_1, v_2, v_3)$ e in tal caso si determinino dei coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ in modo tale che sia $v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. I coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono unici?

(e) Si trovi un vettore $u \in \mathbb{R}^4$, se esiste, che appartenga a $Span(v_1, v_2, v_3)$ e non appartenga a $Span(v_3)$

19. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (0, 1, 0), v_3(-1, 0, -3)$$

e sia $V = Span(v_1, v_2, v_3)$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3

(a) Si dica qual è la dimensione di V e se ne dia una base

(b) Dire se il vettore $e_1 + e_2 - e_3$ appartiene a V, essendo (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(c) Dire se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $(h + 1, 1 - h, 1)$ appartenga ad S.

20. Sia S il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica qual è la dimensione di S e se ne dia una base B

(b) Dire se il vettore $e_1 + e_2$ appartiene a S, essendo (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\in \mathbb{R}^3$.

21. Sia S il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 = x_2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica qual è la dimensione di S e se ne dia una base B

(b) Dire se il vettore $e_1 + e_2$ appartiene a S, essendo (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\in \mathbb{R}^3$.

22. Sia S il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica qual è la dimensione di S e se ne dia una base B

(b) Si completi B ad una base di ^{4}

(c) Stabilire quali dei seguenti vettori appartiene a S

$$w_1 = (2, 2, -2, 0), w_2 = (0, 0, 0, 0), w_3 = (1, 2, -1, 1)$$

(d) Esistono valori di $t \in \mathbb{R}$ affinchè il vettore $(3, 4 + t, -3, 2) \in S$?

(e) Detto S' il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

si trovi una base per il sottospazio $S \cap S'$

23. Sia S il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica qual è la dimensione di S e se ne dia una base B

(b) Stabilire quali dei seguenti vettori appartiene a S

$$w_1 = (1,1,0,0), w_2 = (0,0,0,0), w_3 = (1,0,-1,0)$$

(c) Stabilire se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ affinchè il vettore $u_h = (h,1,1,h^3-1)$ appartenga ad S, e in tal caso determinarli.