Esercitazione di Matematica 18/12/2014 Dott. F. Greco

1. Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$T(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3$$

$$T(e_2) = 2e_2 - e_3$$

$$T(e_3) = e_1 + e_3$$

   (a) Si mostri che T è un isomorfismo di $\mathbb{R}^3$

   (b) Si determini la matrice associata a T^{-1} rispetto a $\mathcal{E}$

   (c) Si consideri il sottospazio $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Si determini una base del sottospazio immagine $T(W)$.

2. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita così:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4, 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_1 + 2x_3 + 2x_4)$$

   (a) Stabilire qual é la dimensione del sottospazio immagine $Im(T)$ e se ne determini una base

   (b) Stabilire qual é la dimensione del nucleo $Ker(T)$ e se ne determini una base

   (c) Stabilire se esiste un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^4$ in modo tale che $T(v) = 0$

   (d) T é iniettiva? Perchè?

   (e) T è suriettiva?

   (f) Stabilire se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ in modo che $v_h = (1-h, h, h) \in Im(T)$

   (g) Posto $U = Span\,(e_1 - e_2, e_1 + e_3) \subseteq \mathbb{R}^4$ stabilire qual è la dimensione del sottospazio $T(W)$ e se ne determini una base.

3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che:

$$T(1,1,0) = (1,1,0,1)$$

$$T(1,-1,2) = (1,2,-1,0)$$

$$T(0,0,1) = (0,0,1,1)$$

   (a) Spiegare perchè T è ben definita.

   (b) Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva

   (c) Qual è l'immagine del vettore $v = (2,0,3)$?

4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3, x_3 - x_1 - 2x_2)$$

   (a) Stabilire qual é la dimensione del sottospazio immagine $Im(F)$ e se ne determini una base

   (b) Stabilire qual é la dimensione del nucleo $Ker(F)$ e se ne determini una base

   (c) Stabilire se F é un isomorfismo di $\mathbb{R}^3$ e in caso affermativo si determini F^{-1}

   (d) Stabilire se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ in modo tale che $F(v) = v$

   (e) Stabilire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ in modo che $v_k = (k-1, 1, k) \in Im(F)$

   (f) Posto $W = Span\,(e_1 + e_2, e_1 + e_3)$ stabilire qual è la dimensione del sottospazio $F(W)$ e se ne determini una base.

   (g) Dopo aver verificato che l'insieme $\mathcal{B} = \{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ non ortonormale rispetto al prodotto scalare standard, si calcoli il determinante della matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}F$ che rappresenta F rispetto a $\mathcal{B}$. (in realtà per calcolare il determinante non è necessario determinare esplicitamente $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}F$. Perchè?)

5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da: $F(x) = Ax$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Si determini la matrice associata alla base costituita dai vettori $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,0), v_3 = (0,0,1)$.

   (b) Si trovi una base del nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.

6. Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(0,1,-1) = (3,-1,0)$$

$$F(-2,1,3) = (-k,-1,k+3)$$

$$Ker(F) = Span\left\{\left(1,k^2+3k,-2\right)\right\}.$$

   Per i valori di k per cui F esiste si specifichi inoltre se essa è unica oppure no.

7. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori

$$u_1 = (3,-1,2,2), u_2 = (1,2,-1,3), u_3 = (1,-5,4,-4).$$

   Si indichi poi con W il sottospazio immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita così:

$$f(x,y,z) = (2x-y, x+3z, 3x+y+z, 2y-3z)$$

   (a) Stabilire qual é la dimensione di U e se ne determini una base

   (b) Stabilire qual é la dimensione di W e se ne determini una base

   (c) Dato il vettore $w_h = (1,4,h,-1)$, si stabilisca se esiste un valore di $h \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $f(v) = w_h$ per qualche $v \in \mathbb{R}^3$ (in altri termini si chiede che $w_h \in W = Im(f)$)

   (d) Si stabilisca se esiste una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g(U) = W$.