C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Materiali Tradizionali e Innovativi 27. 11. 2008

1. Trovare la somma di $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, geometricamente usando un poligono vettoriale. Verificare il risultato con una somma algebrica.

2. Dati i tre punti $A = (-1, 0, 2)$, $B = (-2, 1, 3)$ e $C = (0, 1, 0)$, calcolare
   (a) i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$; (b) la distanza fra i punti A e B;
   (c) il prodotto scalare di $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$; (d) l'angolo BAC in gradi e in radianti.

3. Si scriva una *function* MATLAB/Octave che calcoli l'angolo tra due vettori di $\mathbb{R}^n$ in radianti e in gradi. Nota: L'arcocoseno di x è acos(x).

4. Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori (reali e complessi) per le seguenti matrici:
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
   Confrontare i risultati con quelli ottenuti con MATLAB/Octave:
   >> p = poly(A) % polinomio caratteristico della matrice quadrata A
   >> roots(p) % autovalori
   >> [V, D] = eig(A) % diag(D) = autovalori, colonne di V = autovettori
   >> A*V % uguale a V*D
   >> V*D % se V è non singolare, $A = VDV^{-1}$ (decomposizione spettrale)

5. Calcolate il numero di condizionamento delle matrici in norma 1, 2 e ∞:
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{200} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}.$$
   Confrontate i risultati con quelli ottenuti con MATLAB/Octave usando i comandi cond(A, 1), cond(A, 2), cond(A, inf).

6. Eseguite il seguente codice MATLAB/Octave per comprendere il significato della norma matriciale 2:
   >> t = linspace(0,2*pi); % genera 100 punti equispaziati $0, \frac{2\pi}{99}, \dots, 2\pi$
   >> x = cos(t); y = sin(t); plot(x,y); hold on; axis square % plot circonferenza
   >> A = [4, -1; 2, 1]; B = A * [x;y]; % trasformazione affine della circonferenza
   >> plot(B(1,:), B(2,:)) % plot dell'immagine della circonferenza
   >> r = norm(A); plot(r*x, r*y) % circonferenza di raggio norma 2 di A

   Ripetete tutto con la matrice simmetrica A = [4, -1; -1, 2] e visualizzate anche le direzioni degli autovettori:
   >> [V, D] = eig(A); d1 = D(1,1); d2 = D(2,2);
   >> t1 = linspace(-d1, d1); plot(t1*V(1,1), t1*V(2,1));
   >> t2 = linspace(-d2, d2); plot(t2*V(1,2), t2*V(2,2));