C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Materiali Tradizionali e Innovativi

9. 12. 2008

1. Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice non singolare. Dimostrare che:

   (a) se $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ allora $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;

   (b) se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di A allora $\lambda \neq 0$ e λ^{-1} è un autovalore di A^{-1};

   (c) se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di A e $k \in \mathbb{N}$ allora λ^k è un autovalore di A^k;

   (d) se A è definita positiva e $k \in \mathbb{Z}$ allora A^k è definita positiva.

2. Quali delle seguenti matrici sono definite positive (condizione sufficiente affinché il metodo di Gauss-Seidel converga) e quali sono a dominanza diagonale stretta per righe (condizione sufficiente affinché il metodo di Jacobi e il metodo di Gauss-Seidel convergano)?

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 15 & 6 & 8 & 11 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \\ 8 & 5 & 7 & 6 \\ 11 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

3. Si considerino i sistemi lineari $A_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, 3$, dove A_1 è la matrice 2(c), $A_2 = A_1^2$, $A_3 = A_1^3$ e $\mathbf{b}_i$ tali che la soluzione sia sempre $\mathbf{x}_i = (1, 1, 1, 1)^T$.

   (a) Si risolvino tali sistemi scegliendo il format long e utilizzando la fattorizzazione di Gauss con *pivoting* per righe (comando MATLAB lu e sostituzioni in avanti e all'indietro, si veda lo script sol.m). Si calcolino i numeri di condizionamento per poter commentare i risultati ottenuti.

   (b) Si risolvino i sistemi per $i = 1, 2$ con il metodo di Gauss-Seidel (programma itermeth.m), scegliendo la soluzione iniziale $\mathsf{x_0} = (0, 0, 0, 0)^T$, $\mathsf{nmax} = 20000$ e $\mathsf{tol} = 10^{-10}$. Si cacolino i raggi spettrali delle matrici di iterazione, cioè delle matrici

   $$\mathsf{inv(diag(diag(A_i)) + tril(A_i, -1)) * (-triu(A_i, 1))},$$

   per poter spiegare i risultati ottenuti.

4. La matrice dell'esercizio 2(e) è una cosiddetta matrice di Hilbert e può essere generato con il comando MATLAB hilb(3). Le matrici di Hilbert sono mal condizionate. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A = \mathsf{hilb(13)}$ e $\mathbf{b}$ tale che la soluzione sia $\mathbf{x} = \mathsf{ones(13, 1)}$. Si risolvi tale sistema utilizzando:

   (a) la fattorizzazione di Gauss con *pivoting* per righe (comando MATLAB lu e sostituzioni in avanti e all'indietro, si veda lo script sol.m);

   (b) il comando MATLAB hilb(13) \ b;

   (c) il metodo di Gauss-Seidel (programma itermeth.m), scegliendo la soluzione iniziale $\mathsf{x_0} = \mathsf{zeros(13, 1)}$, $\mathsf{nmax} = 20000$ e $\mathsf{tol} = 10^{-10}$.

   Si cacoli la distanza eulidea tra la soluzione esatta e la soluzione trovata in (a), (b), (c).