C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Materiali Tradizionali e Innovativi

25. 11. 2012

1. (Bramanti-Pagani-Salsa, 6.8, p. 119) Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ composta di autovettori della matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
diagonalizzare la matrice $\mathbf{A}$ con una matrice di passaggio ortogonale di determinante 1 (una rotazione, per quale angolo?) e descrivere geometricamente l'endomorfismo definito da $\mathbf{A}$ (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^2$).

2. Data la matrice hermitiana $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{pmatrix}$, calcolare
   (a) $\det(\mathbf{A})$ e $\mathbf{A}^{-1}$;
   (b) gli autovalori λ_1, λ_2 di $\mathbf{A}$;
   (c) numeri complessi z_1, z_2 tali che $\begin{pmatrix} 5 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ z_2 \end{pmatrix}$ siano autovettori di $\mathbf{A}$ relativi a λ_1, λ_2 rispettivamente;
   (d) una matrice unitaria $\mathbf{U}$ e la su inversa $\mathbf{U}^{-1}$ tale che $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$; La matrice $\mathbf{U}$ è unica?
   (e) l'autovalore di modulo massimo di $\mathbf{A}^{-10}$.

3. Descrivere geometricamente l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalla matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
rispetto alla base canonica. Dire se la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ o su $\mathbf{C}$, e in caso affermativo diagonalizzarla.

4. Diagonalizzare la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con una matrice di passaggio unitaria.

5. Confrontare i risultati degli esercizi precedenti con quelli ottenuti in MATLAB/Octave. Come si può verificare la correttezza delle matrici di passaggio $\mathbf{U}$ unitarie?